Editora Bernoulli

# MATEMÁTICA

Volume 06

# Sumário - Matemática

# MATEMÁTICA

MÓDULO 11 — FRENTE A

## Probabilidades I

### INTRODUÇÃO

Há dois tipos de fenômenos que são objeto de estudo científico: os fenômenos **determinísticos** e os fenômenos **aleatórios**.

Em um fenômeno determinístico, os resultados dos experimentos correspondentes podem ser determinados de antemão. Conhecemos as leis que os governam a ponto de afirmarmos que tais experimentos, repetidos nas mesmas condições, irão produzir resultados idênticos. Como exemplo, podemos descrever o movimento de um corpo em queda livre, determinando o tempo gasto para atingir o solo.

Já em um fenômeno aleatório, os experimentos correspondentes, repetidos nas mesmas condições, não necessariamente produzem os mesmos resultados. Apesar de não sabermos com exatidão qual resultado será obtido, geralmente somos capazes de descrever o conjunto de todos os resultados possíveis para esses experimentos. A seguir, dizemos que um desses possíveis resultados possui uma determinada "chance" de ocorrer. Essa "chance" é denominada **probabilidade de ocorrência de um evento**. Como exemplo, temos o experimento "lançar uma moeda e observar a face superior". A probabilidade de obtermos "cara" na face superior é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, 50%.

### EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É todo experimento que depende exclusivamente do acaso. Chamamos de **acaso** aos múltiplos fatores que atuam no fenômeno e cuja consideração nos cálculos é inviável dada a impossibilidade de controlarmos as suas causas.

**Exemplos**

**1º)** Lançar um dado e observar o número obtido na face superior.

**2º)** Sortear uma das bolas numeradas de uma urna.

**3º)** Retirar duas cartas de um baralho e observar os seus naipes.

### ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, que será indicado por **E**. Denotamos por n(E) o número de elementos do espaço amostral.

**Exemplos**

**1º)** Experimento: lançar uma moeda e observar a face superior.

$$E = \{\text{cara, coroa}\} \text{ e } n(E) = 2$$

**2º)** Experimento: lançar simultaneamente duas moedas e observar as faces superiores obtidas.

Indicamos cara por **C** e coroa por **K**.

Assim, temos $E = \{(C,C), (C,K), (K,C), (K,K)\}$ e $n(E) = 4$.

Podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem na obtenção de n(E), como segue:

$$\begin{array}{ccc} \text{Moeda 1} & \text{e} & \text{Moeda 2} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

n(E) = 2 possibilidades x 2 possibilidades ⇒
n(E) = 4 resultados possíveis

**3º)** Experimento: lançar simultaneamente dois dados e observar as faces superiores obtidas.

Seja cada parênteses um experimento, no qual o primeiro valor foi obtido no primeiro dado, e o segundo valor, obtido no segundo dado. Assim, temos:

$$E = \left\{\begin{array}{cccccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6) \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6) \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6) \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6) \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6) \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array}\right\}$$

n(E) = 36

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Dado 1} & \text{e} & \text{Dado 2} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

n(E) = 6 possibilidades x 6 possibilidades ⇒
n(E) = 36 resultados possíveis

**4°)** Experimento: sortear uma comissão de 3 alunos entre 10 alunos de uma turma.

Descrever tal espaço amostral é trabalhoso. Portanto, vamos determinar apenas n(E). Temos que o total de comissões de 3 alunos é dado por:

$n(E) = C_{10,\,3} = \dfrac{10!}{7!.3!} = 120$ comissões

## EVENTO

Chama-se evento a qualquer subconjunto do espaço amostral.

**Exemplos**

**1°)** Evento **A**: No lançamento de um dado, obter um número ímpar.

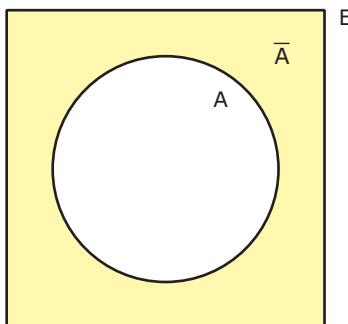
A = {1; 3; 5}

n(A) = 3

**2°)** Evento **B**: No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis, obter soma das faces igual a 7.

B = {(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}

n(B) = 6

## EVENTO COMPLEMENTAR

Sejam **E** um espaço amostral finito e não vazio e **A** um evento de **E**. Chama-se de evento complementar do evento **A** aquele formado pelos resultados que não fazem parte do evento **A** (indicamos por $\overline{A}$).

Como exemplo, sendo A = {1; 3; 5} o evento "sair um número ímpar no lançamento de um dado", temos:

$\overline{A}$= {2; 4; 6}

Esquematicamente:

$n(A) + n(\overline{A}) = n(E)$

## ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Chamamos de espaço amostral equiprovável aquele cujos resultados possuem a mesma chance de ocorrerem. Em termos de frequências relativas, supomos que, ao aumentarmos indefinidamente o número de experimentos, os diferentes resultados tendem a aparecer na mesma frequência.

## PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DE UM EVENTO

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral equiprovável **E**, com n(E) elementos. Seja **A** um determinado evento de **E** com n(A) elementos. A probabilidade de ocorrência do evento **A** é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

**Exemplo**

No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis, qual é a probabilidade de obtermos uma soma das faces igual a 10?

***Resolução:***

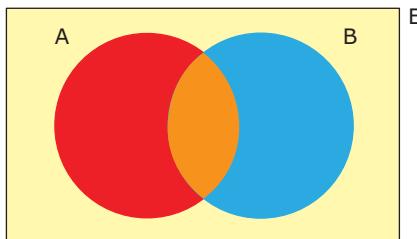
Temos n(E) = 6 x 6 = 36.

Seja **A** o evento de **E** "obter uma soma igual a 10".

A = {(4, 6), (6, 4), (5, 5)} e n(A) = 3

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ ou, aproximadamente, 8,3%.

### Propriedades

$P(U) = 1$

$P(\varnothing) = 0$

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

# ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Sendo **A** e **B** dois eventos de um espaço amostral **E**, conforme o esquema a seguir:

Sabemos que o número de elementos da união de dois conjuntos **A** e **B** é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo os dois membros por n(E), temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

Ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

OBSERVAÇÃO

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que **A** e **B** são **mutuamente exclusivos**.

Assim, $P(A \cap B) = 0$.

Logo, para eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (FUVEST-SP–2009) Dois dados cúbicos, não viciados, com faces numeradas de 1 a 6, serão lançados simultaneamente. A probabilidade de que sejam sorteados dois números consecutivos, cuja soma seja um número primo, é de

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{4}{9}$

D) $\frac{5}{9}$

E) $\frac{2}{3}$

**02.** (UFMG–2007) Em uma mesa, estão espalhados 50 pares de cartas. As duas cartas de cada par são iguais e cartas de pares distintos são diferentes. Suponha que duas dessas cartas são retiradas da mesa ao acaso. Então, é **CORRETO** afirmar que a probabilidade de essas duas cartas serem iguais é

A) $\frac{1}{100}$

B) $\frac{1}{99}$

C) $\frac{1}{50}$

D) $\frac{1}{49}$

**03.** (UFTM-MG–2010) Um saco continha 20 bolas, entre brancas e azuis. Desse modo, havia uma probabilidade **p** de se retirar ao acaso 1 bola azul. Foram retiradas 2 bolas ao acaso e verificou-se que uma era azul e a outra, branca. A probabilidade de se tirar ao acaso 1 bola azul passou a ser de $p - \frac{1}{36}$. O número inicial de bolas azuis no saco era

A) 15

B) 12

C) 8

D) 5

E) 2

**04.** (PUC-SP) Joel e Jane fazem parte de um grupo de dez atores: 4 mulheres e 6 homens. Se duas mulheres e três homens forem escolhidos para compor o elenco de uma peça teatral, a probabilidade de que Joel e Jane, juntos, estejam entre eles é

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{8}$

**05.** (Unicamp-SP) Uma urna contém 50 bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

I) **x** delas são brancas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a **x**.

II) x + 1 delas são azuis e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 1.

III) x + 2 delas são amarelas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 2.

IV) x + 3 delas são verdes e numeradas sequencialmente de 1 a x + 3.

A) Qual é o valor numérico de **x**?

B) Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma bola azul ou uma bola com o número 12?

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (UFPE–2009) Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra COVEST, qual a probabilidade de suas primeira e última letras serem consoantes?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{7}$

E) $\frac{5}{7}$

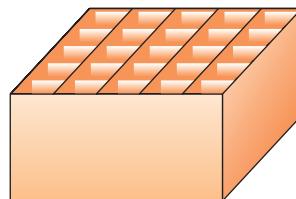
**02.** (Fatec-SP) Numa eleição para prefeito de uma certa cidade, concorreram somente os candidatos **A** e **B**. Em uma seção eleitoral, votaram 250 eleitores. Do número total de votos dessa seção, 42% foram para o candidato **A**, 34% foram para o candidato **B**, 18% foram anulados e os restantes estavam em branco. Tirando-se, ao acaso, um voto dessa urna, a probabilidade de que seja um voto em branco é

A) $\frac{1}{100}$

B) $\frac{3}{50}$

C) $\frac{1}{50}$

D) $\frac{1}{25}$

E) $\frac{3}{20}$

**03.** (UFU-MG–2006) Numa classe com 50 alunos, 8 serão escolhidos, aleatoriamente, para formar uma comissão eleitoral. A probabilidade de Lourenço, Paulo e Larissa, alunos da classe, fazerem parte desta comissão é igual a

A) $\frac{3}{50}$

B) $\frac{1}{175}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{350}$

**04.** (Mackenzie-SP) Escolhe-se, ao acaso, um número de três algarismos distintos tomados do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. A probabilidade de, nesse número, aparecer o algarismo 2 e não aparecer o algarismo 4 é

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{4}{5}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{5}{10}$

E) $\frac{7}{10}$

**05.** (UNIFESP) Um engradado, como o da figura a seguir, tem capacidade para 25 garrafas. Se, de forma aleatória, forem colocadas 5 garrafas no engradado, a probabilidade de que quaisquer duas delas não recaiam numa mesma fila horizontal, nem numa mesma fila vertical, é

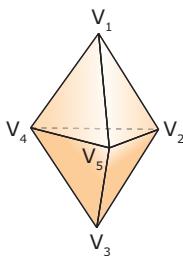
A) $\frac{5!}{25!}$

B) $\frac{5!.5!}{25!}$

C) $\frac{5!.20!}{25!}$

D) $\frac{5!.5!.20!}{25!}$

E) $\frac{5!.5!.25!}{20!}$

**06.** (UFU-MG–2008) Lança-se um dado não viciado e se observa o número correspondente à face que caiu voltada para cima. Sejam **a**, **b** e **c**, respectivamente, os valores observados em três lançamentos sucessivos. Se $x = a.10^2 + b.10 + c$, então a probabilidade de esse número **x** de três algarismos ser divisível por 2 ou por 5 é igual a

A) $\frac{8}{12}$

B) $\frac{7}{12}$

C) $\frac{9}{12}$

D) $\frac{10}{12}$

**07.** (Mackenzie-SP) Num grupo de 12 professores, somente 5 são de Matemática. Escolhidos ao acaso 3 professores do grupo, a probabilidade de, no **MÁXIMO**, um deles ser de Matemática é

A) $\frac{3}{11}$

B) $\frac{5}{11}$

C) $\frac{7}{11}$

D) $\frac{8}{11}$

E) $\frac{9}{11}$

**08.** (UFG–2007) Um grupo de 150 pessoas é formado por 28% de crianças, enquanto o restante é composto de adultos. Classificando esse grupo por sexo, sabe-se que $\frac{1}{3}$ entre os de sexo masculino é formado por crianças e que $\frac{1}{5}$ entre os de sexo feminino também é formado por crianças. Escolhendo ao acaso uma pessoa nesse grupo, **CALCULE** a probabilidade de essa pessoa ser uma criança do sexo feminino.

**09.** (UNESP–2007) Dado um poliedro com 5 vértices e 6 faces triangulares, escolhem-se ao acaso três de seus vértices. A probabilidade de que os três vértices escolhidos pertençam à mesma face do poliedro é

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{6}{35}$

**10.** (FUVEST-SP) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Qual a frequência de uma face 1?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{12}$

**11.** (CEFET-MG–2008) A Coordenação de Matemática de uma escola promoveu uma gincana, na qual uma das tarefas era resolver o seguinte problema:

"As faces de uma moeda são denominadas cara (**K**) e coroa (**C**). Se essa moeda for lançada 6 vezes, qual é a probabilidade de se obter 4 caras e 2 coroas?"

A equipe marcaria ponto, nessa tarefa, se encontrasse

A) $\frac{15}{64}$

B) $\frac{27}{64}$

C) $\frac{7}{32}$

D) $\frac{9}{32}$

E) $\frac{5}{16}$

**12.** (UFU-MG–2007) De uma urna que contém bolas numeradas de 1 a 100 será retirada uma bola. Sabendo-se que qualquer uma das bolas tem a mesma chance de ser retirada, qual é a probabilidade de se retirar uma bola cujo número é um quadrado perfeito ou um cubo perfeito?

A) 0,14

B) 0,1

C) 0,12

D) 0,16

**13.** (UFU-MG–2007) Se no conjunto dos divisores positivos de 1 440 escolhermos aleatoriamente um número, a probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 16 é igual a

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{16}{1\,440}$

C) $\frac{9}{10}$

D) $\frac{2}{3}$

**14.** (FEI-SP) Em uma pesquisa realizada em uma faculdade, foram feitas duas perguntas aos alunos. Cento e vinte responderam "sim" a ambas; 300 responderam "sim" à primeira; 250 responderam "sim" à segunda e 200 responderam "não" a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido "não" à primeira pergunta?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{11}{21}$ E) $\frac{4}{25}$

**15.** (VUNESP) Um baralho consiste em 100 cartões numerados de 1 a 100. Retiram-se dois cartões ao acaso (sem reposição). A probabilidade de que a soma dos dois números dos cartões retirados seja igual a 100 é

A) $\frac{49}{4\,950}$

B) $\frac{50}{4\,950}$

C) 1%

D) $\frac{49}{5\,000}$

E) $\frac{51}{4\,851}$

**16.** (FEI-SP) Uma urna contém 3 bolas numeradas de 1 a 3 e outra urna contém 5 bolas numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola de cada urna, a probabilidade de a soma dos pontos ser maior do que 4 é

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**17.** (Mackenzie-SP) Uma pessoa **A** concorre com você neste Concurso Vestibular com 40% de chance de ser aprovada. A probabilidade de que pelo menos um de vocês dois seja aprovado é 64%. Então, relativamente à pessoa **A**, a probabilidade de você ser aprovado é

A) a mesma.

B) o dobro.

C) o triplo.

D) a metade.

E) um quarto.

**18.** (FUVEST-SP) Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que esses vértices pertençam a uma mesma face é

A) $\frac{3}{14}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{5}{14}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{13}{18}$

**19.** (UFOP-MG–2008) Em um laboratório, existem **n** substâncias. Sabe-se que exatamente duas dessas substâncias não podem estar simultaneamente em qualquer mistura, porque provocam explosão. Um aluno que desconhece esse fato resolve misturar 6 das **n** substâncias. Sendo a probabilidade de explosão na mistura feita pelo aluno de 1 para 14, **DETERMINE** o número **n** de substâncias existentes no laboratório.

# SEÇÃO ENEM

**01.** (Enem–2009) Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no *ranking* de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: <http://www.ipea.gov.br>. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é

A) $\frac{2}{17}$

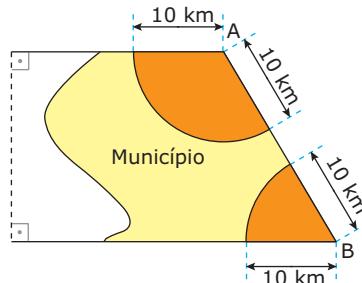
B) $\frac{5}{17}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{12}{17}$

**Instrução:** Texto para as questões **02** e **03**.

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras **T**, **V** e **E**. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

**02.** (Enem–1998) A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a

A) 0

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{6}$

**03.** (Enem–1998) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a

A) 0

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{6}$

**04.** (Enem–2001) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas **A** e **B** alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura.

Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente,

A) 20%.

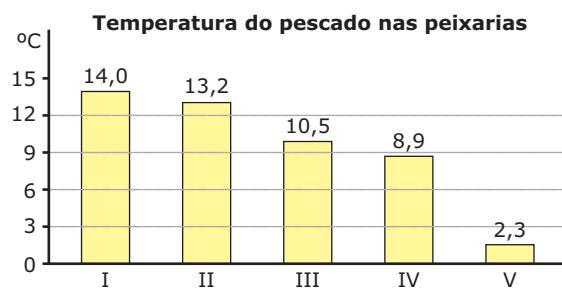
B) 25%.

C) 30%.

D) 35%.

E) 40%.

**05.** (Enem–2006) A tabela a seguir indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo • significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo * significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

| | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| **A** | | | | * |
| **B** | • * | | • | • * |
| **C** | • * | * | | * |
| **D** | • | | • | |

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a

A) 0,00

B) 0,25

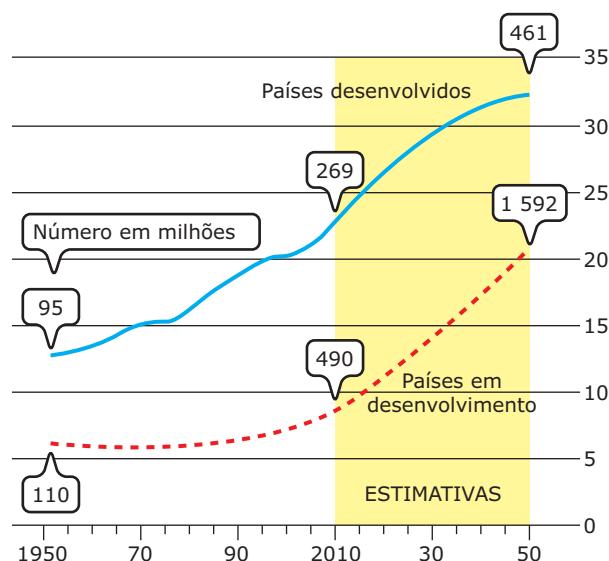
C) 0,50

D) 0,75

E) 1,00

**06.** (Enem–2006) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo: Pedro, camisa 6: — Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça. Tadeu, camisa 2: — Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta... Ricardo, camisa 12: — Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos... Desse diálogo, conclui-se que

A) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.
B) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
C) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.
D) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
E) Não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

**07.** (Enem–2007)

Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (Adaptação).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 ºC e 4 ºC. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

A) $\frac{1}{2}$  B) $\frac{1}{3}$  C) $\frac{1}{4}$  D) $\frac{1}{5}$  E) $\frac{1}{6}$

**08.** (Enem–2009) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

Fonte: "Pespectivas da População Mundial". ONU. 2009
Disponível em: <www.economist.com>.
Acesso em: 9 jul. 2009 (Adaptação).

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

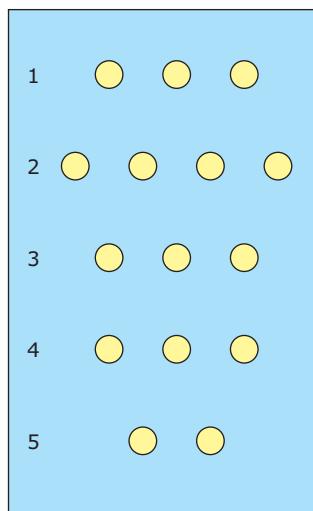
A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{7}{20}$

C) $\frac{8}{25}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{3}{25}$

**09.** (Enem–2009) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da Mega Sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: <www.caixa.gov.br>. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da Mega Sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

A) $1\frac{1}{2}$ vez menor.
B) $2\frac{1}{2}$ vezes menor.
C) 4 vezes menor.
D) 9 vezes menor.
E) 14 vezes menor.

**10.** (Enem–2001) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão

Verso do cartão

Como jogar:
- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um **X** em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas, terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de **X** distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão, existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{54}$ D) $\frac{1}{72}$ E) $\frac{1}{108}$

**11.** (Enem–2005) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir:

Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{7}{15}$
D) $\frac{7}{23}$
E) $\frac{7}{25}$

## GABARITO

### Fixação

| | | |
|---|---|---|
| 01. A | 03. D | 05. A) x = 11 |
| 02. B | 04. C | B) $\frac{7}{25}$ |

### Propostos

| | | |
|---|---|---|
| 01. B | 08. $\frac{2}{25}$ | 15. A |
| 02. B | 09. C | 16. A |
| 03. D | 10. C | 17. A |
| 04. C | 11. A | 18. D |
| 05. D | 12. C | 19. n = 21 |
| 06. A | 13. A | |
| 07. C | 14. D | |

### Seção Enem

| | | |
|---|---|---|
| 01. E | 05. A | 09. C |
| 02. B | 06. D | 10. C |
| 03. A | 07. D | 11. E |
| 04. B | 08. C | |

# MATEMÁTICA

## Probabilidades II

MÓDULO 12 FRENTE A

### PROBABILIDADE CONDICIONAL

Considere a seguinte situação:

Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma pessoa sorteia uma bola e, ao invés de divulgar de imediato o resultado, ela declara: "O número sorteado é múltiplo de 6".

Com base nesses dados, pergunta-se: Qual é a probabilidade de o número sorteado ser um número maior do que 30?

Observe que a probabilidade de o número ser maior do que 30 está condicionada ao fato de já sabermos de antemão que o número sorteado é múltiplo de 6. Portanto, tal informação altera o espaço amostral que normalmente seria considerado.

Assim, temos:

**i)** Números múltiplos de 6 entre 1 e 50 = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}.

**ii)** Observe que, no conjunto anterior, os números 36, 42 e 48 são maiores do que 30.

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{3}{8}$.

O problema anterior poderia também ser resolvido de outra forma. Consideremos os seguintes eventos:

**i)** **A**: Sortear um número múltiplo de 6.

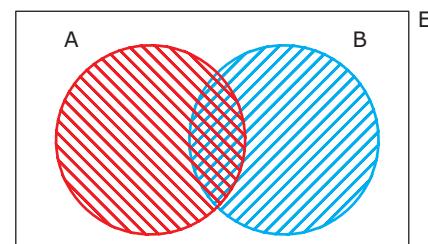
$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$

$n(A) = 8$

**ii)** **B**: Sortear um número maior do que 30.

$B = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50\}$

$n(B) = 20$

**iii)** Como devemos considerar a ocorrência do evento **B**, uma vez que o evento **A** já ocorreu, estamos interessados nos elementos de **B** que pertencem também a **A**, ou seja, $A \cap B$.

$A \cap B = \{36, 42, 48\}$

$n(A \cap B) = 3$

Observe que o conjunto **A** é o espaço amostral reduzido a ser considerado e que a probabilidade pedida é equivalente a:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{8}$$

Generalizando esse conceito, consideremos os eventos **A** e **B** de um espaço amostral **E**, conforme o diagrama a seguir:

Denotamos por P(B/A) a probabilidade condicional de **B** em relação a **A**, ou seja, a probabilidade de ocorrer **B** dado que **A** já ocorreu.

Assim, temos:

$$P(B/A) = P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração por n(E), temos:

$$P(B/A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} \Rightarrow$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

OBSERVAÇÃO

Se a ocorrência do evento **B** não está condicionada à ocorrência do evento **A**, dizemos que os eventos **A** e **B** são independentes. Dois eventos **A** e **B** são independentes se, e somente se, P(B/A) = P(B).

# EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01.** Considerar o experimento: “lançar simultaneamente dois dados e observar as faces superiores obtidas”. Sabendo que, ao realizar o experimento, a soma dos números obtidos foi igual a um número primo, **CALCULAR** a probabilidade de essa soma ser menor do que 5.

***Resolução:***

Sejam os seguintes eventos:

A) Obter soma igual a um número primo.

$$A = \{\underbrace{(1, 1)}_{soma\,=\,2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{soma\,=\,3}, \underbrace{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}_{soma\,=\,5},$$

$$\underbrace{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}_{soma\,=\,7}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{soma\,=\,11}\}$$

$n(A) = 15$

B) Obter soma menor do que 5.

$$A = \{\underbrace{(1, 1)}_{soma\,=\,2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{soma\,=\,3}, \underbrace{(1, 3), (3, 1), (2, 2)}_{soma\,=\,4}\}$$

$n(B) = 6$

Assim, temos que:

$A \cap B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$n(A \cap B) = 3$

Sabemos, também, que $n(E) = 36$.

$$\text{Portanto: } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Na prática, basta considerarmos, no espaço amostral reduzido **A,** os pares cuja soma é menor do que 5. Desse modo, temos 3 pares em 15, e a probabilidade procurada é igual a $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

**02.** (UEL-PR) Considerar como verdadeiras as seguintes informações:

i) O Londrina Esporte Clube está com um time que ganha jogos com probabilidade de 0,40 em dias de chuva e de 0,70 em dias sem chuva.

ii) A probabilidade de um dia de chuva em Londrina, no mês de março, é de 0,30.

Se o time ganhou um jogo em um dia de março, em Londrina, então a probabilidade de que nessa cidade tenha chovido naquele dia é de

A) 30%.
B) 87,652%.
C) 19,672%.
D) 12,348%.
E) 80,328%.

***Resolução:***

Sejam:

$P(C)$ = probabilidade de chover no dia.

$P(V)$ = probabilidade de o time vencer.

$P(C/V)$ = probabilidade de chover no dia, uma vez que o time venceu.

Sabemos que $P(C/V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)}$ e temos que a probabilidade de chover e de o time vencer é dada por:

$P(C \cap V) = 0{,}3.0{,}4 = 0{,}12$

A probabilidade de o time vencer é dada por

$$P(V) = \underbrace{0{,}4.0{,}3}_{\text{vencer e chover}} + \underbrace{0{,}7.0{,}7}_{\text{vencer e não chover}} = 0{,}12 + 0{,}49 = 0{,}61$$

$$\text{Então, } P(C/V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}12}{0{,}61} = 0{,}19672 = 19{,}672\%$$

# TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Uma importante consequência da definição de probabilidade condicional é vista a seguir:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

Do mesmo modo, temos:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

Ou seja:

A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos (interseção) é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, em relação ao primeiro.

OBSERVAÇÃO

Se os eventos **A** e **B** são independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A)$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**03.** Um recipiente $R_1$ contém 3 bolinhas pretas e 4 bolinhas brancas. Um segundo recipiente $R_2$ possui 8 bolinhas pretas e 2 bolinhas brancas. Ao escolhermos um recipiente ao acaso e dele retirarmos uma bolinha, qual a probabilidade de se observar o recipiente $R_2$ e uma bolinha branca?

***Resolução:***

Sejam:

$P(R_2)$ = probabilidade de se escolher o recipiente $R_2$.

$P(B/R_2)$ = probabilidade de se escolher uma bolinha branca, dado que já escolhemos $R_2$.

$P(R_2 \cap B)$ = probabilidade de se escolher $R_2$ e uma bolinha branca.

Temos:

$$P(R_2 \cap B) = P(R_2).P(B/R_2) = \frac{1}{2}.\frac{2}{10} = \frac{1}{10} = 10\%$$

## LEI BINOMIAL DA PROBABILIDADE

Consideremos uma sequência de ensaios nos quais a probabilidade de ocorrência de determinado resultado não dependa dos resultados obtidos em ensaios anteriores e tampouco interfira nos próximos resultados. Esses ensaios são chamados *Ensaios de Bernoulli*.

Como exemplo, imaginemos o seguinte experimento: "Lançar um dado e observar a face superior obtida". Ao repetirmos esse ensaio 5 vezes, qual é a probabilidade de obtermos o número 3 exatamente duas vezes?

***Resolução:***

A probabilidade de se obter o número 3 em um lançamento é igual a $\frac{1}{6}$. Obviamente, a probabilidade de não se obter o número 3 nesse lançamento é igual a $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Como a ordem de obtenção do número 3 na sequência de ensaios não é importante, devemos inicialmente escolher 2 dos 5 ensaios efetuados. Isso pode ser feito de $C_{5,\,2}$ modos distintos.

Denotemos por P(A) a probabilidade de se obter o número 3 exatamente duas vezes.

Assim, temos:

$$P(A) = C_{5,\,2}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5!}{3!.2!}.\frac{125}{7\,776} = 0{,}160751 \Rightarrow$$

$P(A) = 16{,}0751\%$

De maneira geral, se desejamos calcular a probabilidade **P** de obtermos exatamente **k** resultados favoráveis em **n** ensaios, temos que:

$$P = C_{n,\,k}.(P_f)^k.(1 - P_f)^{n-k}$$

Em que $P_f$ é a probabilidade de obtermos o resultado favorável em um ensaio.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**04.** Um baralho contém 8 cartas, das quais apenas uma é um ás. Uma carta é retirada ao acaso e depois devolvida ao baralho. Ao repetirmos o experimento quatro vezes, qual é a probabilidade de obtermos um ás exatamente duas vezes?

***Resolução:***

$$P = C_{4,\,2}.\left(\frac{1}{8}\right)^2.\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{4!}{2!.2!}.\frac{1}{64}.\frac{49}{64} = \frac{147}{2\,048}$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UFJF-MG–2006) Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. A probabilidade de que pelos menos uma criança seja menino é de

A) 25%.

B) 42%.

C) 43,7%.

D) 87,5%.

E) 64,6%.

**02.** (UFMG–2006) Leandro e Heloísa participam de um jogo em que se utilizam dois cubos. Algumas faces desses cubos são brancas e as demais, pretas. O jogo consiste em lançar, simultaneamente, os dois cubos e em observar as faces superiores de cada um deles quando param:

i) Se as faces superiores forem da mesma cor, Leandro vencerá.

ii) Se as faces superiores forem de cores diferentes, Heloísa vencerá.

Sabe-se que um dos cubos possui cinco faces brancas e uma preta e que a probabilidade de Leandro vencer o jogo é de $\frac{11}{18}$. Então, é **CORRETO** afirmar que o outro cubo tem

A) quatro faces brancas.

B) uma face branca.

C) duas faces brancas.

D) três faces brancas.

MATEMÁTICA

**03.** (UERJ) Um instituto de pesquisa colheu informações para saber as intenções de voto no segundo turno das eleições para governador de determinado estado. Os dados estão indicados no quadro a seguir:

| Intenção dos votos | Percentual |
|---|---|
| Candidato **A** | 26% |
| Candidato **B** | 40% |
| Votos nulos | 14% |
| Votos brancos | 20% |

Escolhendo aleatoriamente um dos entrevistados, verificou-se que ele não vota no candidato **B**. A probabilidade de que esse eleitor vota em branco é

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

**04.** (FUVEST-SP)

A) Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\frac{2}{3}$?

B) Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e **x** bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente ao acaso uma bola dessa urna. Para que valores de **x** a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?

**05.** (UFF-RJ–2007)

Búzios são pequenas conchas marinhas que, em outras épocas, foram usadas como dinheiro e hoje são empregadas como enfeites, inclusive em pulseiras, colares e braceletes, ou como amuletos ou em jogos de búzios. No jogo de búzios, considera-se a hipótese de que cada búzio admite apenas dois resultados possíveis (abertura para baixo – búzio fechado – ou abertura para cima – búzio aberto). Suponha que 6 búzios idênticos sejam lançados simultaneamente e que a probabilidade de um búzio ficar fechado ao cair, ou ficar aberto, é igual a $\frac{1}{2}$. Pode-se afirmar que a probabilidade de que fiquem 3 búzios abertos e 3 búzios fechados ao cair, sem se levar em consideração a ordem em que eles tenham caído, é igual a

A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{9}{32}$ C) $\frac{15}{64}$ D) $\frac{9}{64}$ E) $\frac{3}{32}$

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (UFPE–2005) O vírus **X** aparece nas variantes $X_1$ e $X_2$. Se um indivíduo tem esse vírus, a probabilidade de ser a variante $X_1$ é de $\frac{3}{5}$. Se o indivíduo tem o vírus $X_1$, a probabilidade de esse indivíduo sobreviver é de $\frac{2}{3}$; mas, se o indivíduo tem o vírus $X_2$, a probabilidade de ele sobreviver é de $\frac{5}{6}$. Nessas condições, qual a probabilidade de o indivíduo portador do vírus **X** sobreviver?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{7}{15}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{11}{15}$

**02.** (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas, verificou-se que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

A) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta?

B) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita?

**03.** (UFRJ–2006) Com o intuito de separar o lixo para fins de reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras, de acordo com o tipo de resíduo a que se destinam: vidro, plástico, metal, papel e lixo orgânico.

Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma embalagem plástica e, ao mesmo tempo, em outra, uma garrafa de vidro. A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma lixeira é igual a

A) 25%.

B) 30%.

C) 35%.

D) 40%.

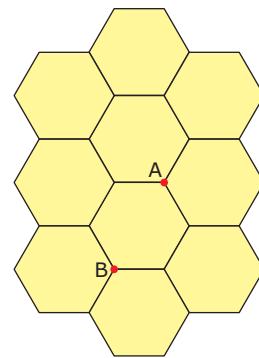
**04.** (Mackenzie-SP) Numa urna, são colocadas 60 bolas iguais, numeradas de 1 a 60. A probabilidade de sortearmos, sucessivamente, com reposição, 3 bolas com números que são múltiplos de 5 é

A) 8%.

B) 0,8%.

C) 0,08%.

D) 0,008%.

E) 0,0008%.

**05.** (UFU-MG–2006) Em um vilarejo com 1 000 habitantes, 52% dos habitantes são mulheres e 25% dos homens têm no máximo 20 anos. Escolhendo-se aleatoriamente dois habitantes da cidade, a probabilidade de que as duas pessoas escolhidas sejam homens, sendo um deles com no máximo 20 anos de idade e o outro com pelo menos 21 anos de idade, é igual a

A) $\frac{16}{185}$

B) $\frac{27}{625}$

C) $\frac{12}{275}$

D) $\frac{12}{2\,775}$

**06.** (UNESP–2008) Um lote de um determinado produto tem 500 peças. O teste de qualidade do lote consiste em escolher aleatoriamente 5 peças, sem reposição, para exame. O lote é reprovado se qualquer uma das peças escolhidas apresentar defeito. A probabilidade de o lote não ser reprovado se ele contiver 10 peças defeituosas é determinada por

A) $\frac{10}{500}.\frac{9}{499}.\frac{8}{498}.\frac{7}{497}.\frac{6}{496}$

B) $\frac{490}{500}.\frac{489}{500}.\frac{488}{500}.\frac{487}{500}.\frac{486}{500}$

C) $\frac{490}{500}.\frac{489}{499}.\frac{488}{498}.\frac{487}{497}.\frac{486}{496}$

D) $\frac{10!}{(10-5)!.5!}.\frac{10}{500}$

E) $\frac{500!}{(500-5)!.5!}.\frac{5}{500}$

**07.** (PUC Minas–2007) A figura representa os possíveis percursos realizados por um robô, programado para andar em frente seguindo os lados de hexágonos. Assim, partindo de **A**, o robô tem três opções distintas de caminho; e, na sequência, como não pode voltar, só pode escolher dois caminhos. Supondo que esse robô parta de **A**, assinale a probabilidade de o mesmo se encontrar em **B**, depois de percorrer exatamente três lados de hexágonos.

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

**08.** (PUC Rio–2007) Brad quer mandar uma carta para Ana. A probabilidade de que Brad mande esta carta é de $\frac{8}{10}$. Dez por cento de todas as cartas enviadas são extraviadas pelo correio e a probabilidade de o carteiro entregar a carta é de 90%.

A) Qual a probabilidade de Ana não receber a carta?

B) Dado que Brad mande a carta, qual a probabilidade de Ana receber a carta?

**09.** (FEI-SP) Uma moeda viciada apresenta probabilidade de ocorrer face cara quatro vezes maior que a probabilidade de ocorrer face coroa. Em 2 lançamentos consecutivos dessa moeda, qual a probabilidade de ocorrer 2 vezes a face coroa?

A) 0,2

B) 0,1

C) 0,01

D) 0,02

E) 0,04

MATEMÁTICA

**10.** (VUNESP) Dois jogadores **A** e **B** vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, **A** ganha e, se a soma for 8, **B** é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que **A** não ganhou. Qual a probabilidade de **B** ter ganho?

A) $\frac{10}{36}$

B) $\frac{5}{32}$

C) $\frac{5}{36}$

D) $\frac{5}{35}$

E) Não se pode calcular sem saber os números sorteados.

**11.** (VUNESP) Sabe-se que os pênaltis a favor de certa equipe de futebol são batidos pelos dois melhores cobradores da equipe, **A** e **B**, cujos índices de aproveitamento (conversão em gols) são, respectivamente, 85% e 90%. Sabe-se, ainda, que **B** cobra 75% dos pênaltis a favor da equipe. Acaba de ser marcado um pênalti a favor dessa equipe e, nesse momento, os jogadores **A** e **B** estão em campo.

A) Qual a probabilidade de que o pênalti seja cobrado por **B** e não seja convertido em gol?

B) Qual a probabilidade de o pênalti ser convertido em gol?

**12.** (Cesgranrio) Lançando-se um dado duas vezes, a probabilidade de ser obtido o par de valores 2 e 3, em qualquer ordem, é de

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{1}{12}$

D) $\frac{1}{15}$

E) $\frac{1}{18}$

**13.** (VUNESP-SP) Um piloto de Fórmula 1 estima que suas chances de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20% se não chover. O Serviço de Meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de 75%. Nessas condições, **CALCULE** a probabilidade de que o piloto venha a subir ao pódio.

**14.** (Mackenzie-SP–2007) Um casal planeja ter 4 filhos; admitindo probabilidades iguais para ambos os sexos, a probabilidade de esse casal ter 2 meninos e 2 meninas, em qualquer ordem, é

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{16}$

E) $\frac{3}{16}$

**15.** (VUNESP) O resultado de uma pesquisa realizada pelo Ipespe sobre o perfil dos fumantes e publicada pela revista *Veja* de 03 de junho de 1998 mostra que, num grupo de 1 000 pessoas, 17% fumam e, entre os fumantes, 44% são mulheres. Se, nesse grupo de 1 000 pessoas, uma é escolhida ao acaso, a probabilidade de ela ser fumante e mulher é, aproximadamente,

A) 0,044

B) 0,075

C) 0,44

D) 0,0075

E) 0,0044

**16.** (UERJ) Suponha haver uma probabilidade de 20% para uma caixa de Microvlar ser falsificada.

O DIA, 25 ago. 1998.

Em duas caixas, a probabilidade de pelo menos uma delas ser falsa é

A) 4%.

B) 16%.

C) 20%.

D) 36%.

**17.** (UFRJ–2006) Uma caixa contém bombons de nozes e bombons de passas. O número de bombons de nozes é superior ao número de bombons de passas em duas unidades. Se retirarmos, ao acaso, dois bombons dessa caixa, a probabilidade de que ambos sejam de nozes é $\frac{2}{7}$.

A) **DETERMINE** o número total de bombons.

B) Se retirarmos, ao acaso, dois bombons da caixa, **DETERMINE** a probabilidade de que sejam de sabores distintos.

**18.** (UFF-RJ–2006) Determinado provedor de Internet oferece aos seus usuários 15 (quinze) salas de bate-papo. Três usuários decidiram acessar as salas. Cada usuário escolheu, independentemente, uma sala. Assinale a alternativa que expressa a probabilidade de os três usuários terem escolhido a mesma sala.

A) $\frac{1}{15^2}$

B) $\frac{1}{15^3}$

C) $\frac{1}{3^3}$

D) $\frac{3}{15}$

E) $\frac{3^3}{15^3}$

**19.** (UNESP–2007) Uma pesquisa publicada pela revista *Veja*, de 07 de junho 2006, sobre os hábitos alimentares dos brasileiros, mostrou que, no almoço, aproximadamente 70% dos brasileiros comem carne bovina e que, no jantar, esse índice cai para 50%. Supondo que a probabilidade condicional de uma pessoa comer carne bovina no jantar, dado que ela comeu carne bovina no almoço, seja $\frac{6}{10}$, **DETERMINE** a probabilidade de a pessoa comer carne bovina no almoço ou no jantar.

**20.** (UNESP–2007) Uma prova é constituída de 12 questões do tipo múltipla escolha, cada uma delas com 5 alternativas. Um candidato pretende fazer essa prova "chutando" todas as respostas, assinalando uma alternativa por questão sem qualquer critério de escolha. A probabilidade de ele acertar 50% da prova é

A) $924.\left(\frac{4}{5}\right)^6$

B) $792.\left(\frac{4}{5}\right)^6$

C) $924.\left(\frac{1}{5}\right)^6$

D) $924.\left(\frac{2}{5}\right)^{12}$

E) $792.\left(\frac{2}{5}\right)^{12}$

# SEÇÃO ENEM

**01.** (Enem–2009) Um casal decidiu que irá ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é de

A) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

B) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

C) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

D) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

E) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

**Instrução:** Texto para as questões **02** e **03**.

Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número entre dez.

1ª opção: comprar três números para um único sorteio.

2ª opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.

3ª opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

**02.** (Enem–2000) Se **X**, **Y**, **Z** representam as probabilidades de o apostador ganhar algum prêmio, escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou a 3ª opção, é **CORRETO** afirmar que

A) $X < Y < Z$

B) $X = Y = Z$

C) $X > Y = Z$

D) $X = Y > Z$

E) $X > Y > Z$

**03.** (Enem–2000) Escolhendo a 2ª opção, a probabilidade de o apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é igual a

A) 90%.

B) 81%.

C) 72%.

D) 70%.

E) 65%.

MATEMÁTICA

**04.** (Enem–2005) Um aluno de uma escola será escolhido por sorteio para representá-la em uma certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno há 300 alunos, distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno há 240 alunos, distribuídos em 6 turmas de 40 alunos. Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio.

Método I: escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.

Método II: escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.

Sobre os métodos I e II de sorteio é correto afirmar:

A) Em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.
B) No método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método II, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
C) No método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método I, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
D) No método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.
E) Em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

**05.** (Enem–2009) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos, para a amarela e 70 segundos, para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa. Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

A) $\frac{1}{25}$
B) $\frac{1}{16}$
C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{1}{2}$

**06.** (Enem–2010) O diretor de um colégio leu em uma revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a media do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

| TAMANHO DOS CALÇADOS | NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS |
|---|---|
| 39,0 | 1 |
| 38,0 | 10 |
| 37,0 | 3 |
| 36,0 | 5 |
| 35,0 | 6 |

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{5}{14}$

## GABARITO

### Fixação

01. D
02. A
03. D
04. A) 16 bolas azuis
    B) x = 1 ou x = 9
05. A

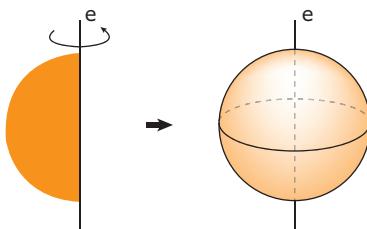
### Propostos

01. E
02. A) 2%
    B) 52,6%
03. C
04. B
05. A
06. C
07. A
08. A) 35,2%
    B) 81%
09. E
10. B
11. A) 7,5%
    B) 88,75%
12. E
13. P = 50%
14. A
15. B
16. D
17. A) 22
    B) $\frac{40}{77}$
18. A
19. 78%
20. D

### Seção Enem

01. E
02. E
03. C
04. D
05. B
06. D

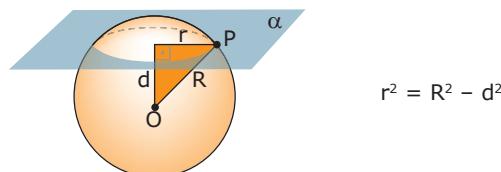
# MATEMÁTICA

MÓDULO 11 FRENTE B

## Esferas

www.footballpictures.net

## INTRODUÇÃO

Considere um ponto **O** e um segmento de medida **R**. Denomina-se esfera de centro **O** e raio **R** o conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a medida OP seja menor ou igual a **R**.

A esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

### Seção

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.

Sendo **R** o raio da esfera, **d** a distância do plano secante ao centro e **r** o raio da seção, vale a relação:

$$r^2 = R^2 - d^2$$

### Área e volume

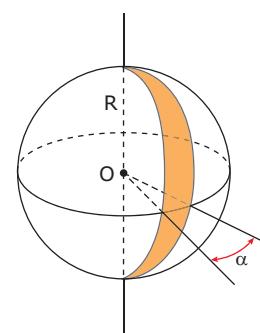
#### Área da esfera

Chama-se superfície da esfera de centro **O** e raio **R** ao conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a medida OP seja igual a **R**.

A área **A** da superfície de uma esfera de raio **R** é dada por:

$$A = 4\pi R^2$$

#### Volume da esfera

O volume **V** de uma esfera de raio **R** é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

## FUSO E CUNHA

#### Fuso esférico

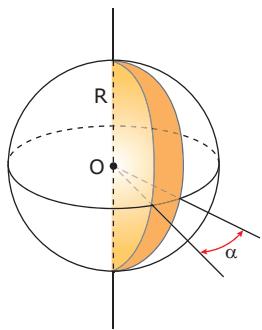
É a região da superfície da esfera compreendida entre duas semicircunferências com extremidades nos polos da esfera.

O ângulo **α**, medido na seção equatorial, e o raio **R** da esfera caracterizam o fuso.

## Área do fuso

Sendo **α** o ângulo do fuso, temos:

- Com **α** em graus:

$$\left.\begin{matrix} 360^o & \text{———} & 4\pi R^2 \\ \alpha & \text{———} & A_{fuso} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{fuso} = \frac{\alpha}{360^o}.4\pi R^2}$$

- Com **α** em radianos:

## Cunha esférica

É a região da esfera compreendida entre dois semicírculos que contêm o seu diâmetro.

A cunha fica determinada pelo raio da esfera e pela medida do ângulo **α**.

## Volume da cunha

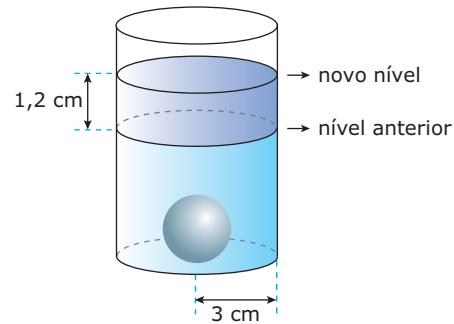
Sendo **α** o ângulo da cunha, temos:

- Com **α** em graus:

$$\left.\begin{matrix} 360^o & \text{———} & \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{———} & V_{cunha} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\alpha}{360^o}.\frac{4}{3}\pi R^3}$$

- Com **α** em radianos:

$$\left.\begin{matrix} 2\pi & \text{———} & \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{———} & V_{cunha} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\alpha 2R^3}{3}}$$

Perceba que $\frac{\alpha^o}{360^o}$ ou $\frac{\alpha}{2\pi}$ equivalem à fração que a cunha corresponde da esfera.

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**01.** (PUCPR) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3 cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2 cm. Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale, aproximadamente,

A) 1 cm.

B) 1,5 cm.

C) 2 cm.

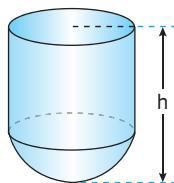
D) 2,5 cm.

E) 3 cm.

***Resolução:***

Ao mergulharmos totalmente uma bolinha em um recipiente cilíndrico de raio 3 cm, o nível da água sobe 1,2 cm. Veja a figura:

O volume da esfera imersa no cilindro é igual ao volume de água deslocada, que corresponde a um cilindro de raio 3 cm e altura 1,2 cm (em azul escuro). Assim:

$$V_{esfera} = V_{água\ deslocada} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi.3^2.1,2 \Rightarrow r^3 = 8,1 \Rightarrow r \cong 2 \text{ cm}$$

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

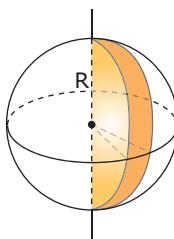
**01.** (UEL-PR–2007) Considere um cone circular reto e um cilindro circular reto, ambos com diâmetro da base igual a 12 cm, e também uma esfera com diâmetro de 12 cm, todos com volumes iguais. A altura do cone e a altura do cilindro devem ser, respectivamente, iguais a

A) 12 cm e 4 cm.

B) 30 cm e 10 cm.

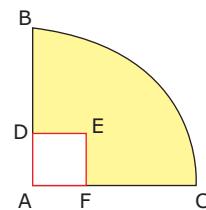
C) 24 cm e 8 cm.

D) 9 cm e 3 cm.

E) 18 cm e 6 cm.

**02.** (UFU-MG–2009) Dispõe-se de um cilindro maciço circular reto, feito de alumínio, cujo raio da base mede 4 cm e a altura, 10 cm. Esse cilindro será derretido e, com o material fundido, serão fabricadas esferas de aço de raio 2 cm. Supondo que nesse processo não ocorra perda de material, então o número de esferas a serem fabricadas, a partir do cilindro dado, é igual a

A) 13
B) 15
C) 14
D) 16

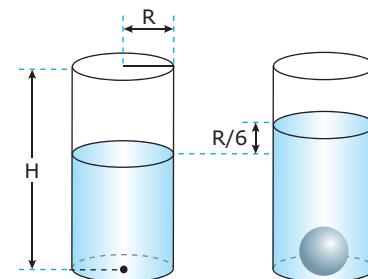
**03.** (UFJF-MG–2007) Um reservatório de água tem a forma de um hemisfério acoplado a um cilindro circular, como mostra a figura a seguir:

A medida do raio do hemisfério é a mesma do raio da base do cilindro e igual a r = 3 m. Se a altura do reservatório é h = 6 m, a capacidade **MÁXIMA** de água comportada por esse reservatório é

A) $9\pi$ m³.
B) $18\pi$ m³.
C) $27\pi$ m³.
D) $36\pi$ m³.
E) $45\pi$ m³.

**04.** (UNESP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida **R** cm foi cortada em 12 fatias iguais, em que cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.

Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio **R** cm é $4\pi R^2$ cm², **DETERMINE**, em função de $\pi$ e de **R**,

A) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico).
B) quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

**05.** (UFMG) Observe esta figura.

Nessa figura, ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1 cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360º, em torno da reta AB, da região hachurada na figura. Sabe-se que o volume de uma esfera de raio **r** é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$. Dessa forma, esse sólido tem um volume de

A) $14\pi$ cm³.
B) $15\pi$ cm³.
C) $16\pi$ cm³.
D) $17\pi$ cm³.

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (UFU-MG–2006) Uma esfera maciça de ferro de raio 10 cm será fundida e todo o material derretido será usado na confecção de um cilindro circular e de um cone circular, ambos maciços com raio da base **r** cm e altura também **r** cm. Não havendo perda de material durante o processo, **r** será igual a

A) 4 cm.
B) 8 cm.
C) 5 cm.
D) 10 cm.

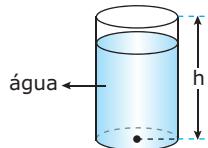
**02.** (UNESP) Em um tanque cilíndrico com raio de base **R** e altura **H** contendo água, é mergulhada uma esfera de aço de raio **r**, fazendo com que o nível da água suba $\frac{1}{6}$.R, conforme mostra a figura.

A) **CALCULE** o raio **r** da esfera em termos de **R**.
B) Assuma que a altura **H** do cilindro é 4R e que antes de a esfera ser mergulhada, a água ocupava $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro. **CALCULE** quantas esferas de aço idênticas à citada podem ser colocadas dentro do cilindro, para que a água atinja o topo do cilindro sem transbordar.

**03.** (UNESP) O trato respiratório de uma pessoa é composto de várias partes, entre elas os alvéolos pulmonares, pequeninos sacos de ar em que ocorre a troca de oxigênio por gás carbônico. Vamos supor que cada alvéolo tem forma esférica e que, num adulto, o diâmetro médio de um alvéolo seja, aproximadamente, 0,02 cm. Se o volume total dos alvéolos de um adulto é igual a 1 618 $cm^3$, o número **APROXIMADO** de alvéolos dessa pessoa, considerando $\pi = 3$, é

A) $1\,618 \times 10^3$
B) $1\,618 \times 10^4$
C) $5\,393 \times 10^2$
D) $4\,045 \times 10^4$
E) $4\,045 \times 10^5$

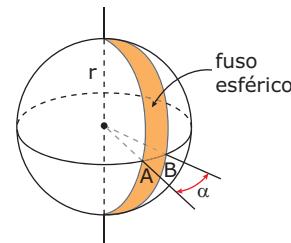
**04.** (FUVEST-SP) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base é 6 cm, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no inteiror do recipiente, ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é

A) 1 cm.
B) 2 cm.
C) 3 cm.
D) 4 cm.
E) 5 cm.

**05.** (UFU-MG) Uma fábrica de sucos estima que necessita de 27 laranjas de 8 cm de diâmetro cada, para produzir um litro de suco concentrado. Para efeito dessa estimativa, a empresa assume que as laranjas são esferas. Contudo, devido à entressafra, as únicas laranjas disponíveis no mercado apresentam diâmetro de 6 cm. Nessas condições, o número **MÍNIMO** de laranjas necessárias para a produção de um litro de suco concentrado será igual a

A) 48 B) 54 C) 64 D) 70

**06.** (UFPE) Uma esfera de centro **O** e raio igual a 5 cm é cortada por um plano **P**, resultando dessa interseção um círculo de raio igual a 4 cm. Assinale, então, a alternativa que fornece a distância de **O** a **P**.

A) 10 cm
B) 5 cm
C) 2 cm
D) 1 cm
E) 3 cm

**07.** (UNIFESP) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm. Esse recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.

A) **CALCULE** o volume de água contido no cilindro. Use $\pi = 3{,}14$.
B) Qual deve ser o raio **R** de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água?

**08.** (UFC) Um vaso em forma de cilindro circular reto tem medida de raio da base 5 cm, altura 20 cm e contém água até a altura de 19 cm (despreze a espessura das paredes do vaso). Assinale a alternativa na qual consta o **MAIOR** número de esferas de aço, de 1 cm de raio cada, que podemos colocar no vaso a fim de que a água não transborde.

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

**09.** (FGV-SP–2006) Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê o arco AB sob um ângulo **α** de 72º, como mostra a figura. Isso significa que a área do fuso esférico determinado por **α** é

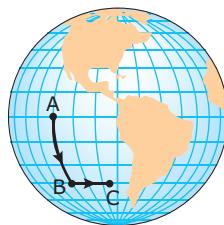
A) $20\pi$ $m^2$.
B) $15\pi$ $m^2$.
C) $10\pi$ $m^2$.
D) $5\pi$ $m^2$.
E) $\pi$ $m^2$.

**10.** (UFPA) A circunferência máxima de uma esfera mede $6\pi$ cm. Qual é o volume da esfera?

A) $12\pi$ $cm^3$
B) $24\pi$ $cm^3$
C) $36\pi$ $cm^3$
D) $72\pi$ $cm^3$
E) $144\pi$ $cm^3$

**11.** (Cesgranrio) Uma cesta cilíndrica de 2 m de altura e raio de base 1 m está cheia de bolas de diâmetro igual à quarta parte de 1 m. Se cerca de 50% da capacidade da cesta correspondem aos espaços vazios, o número **MAIS APROXIMADO** de bolas que a cesta contém é

A) 100
B) 150
C) 215
D) 385
E) 625

**12.** (UNESP–2006) Com um recipiente de vidro fino transparente na forma de um paralelepípedo reto retângulo, que tem como base um quadrado cujo lado mede 15 cm e a aresta da face lateral mede 40 cm, Márcia montou um enfeite de Natal. Para tanto, colocou no interior desse recipiente 90 bolas coloridas maciças de 4 cm de diâmetro cada e completou todos os espaços vazios com um líquido colorido transparente. Desprezando-se a espessura do vidro e usando (para facilitar os cálculos) a aproximação $\pi = 3$,

A) **DÊ**, em $cm^2$, a área lateral do recipiente e a área da superfície de cada bola.
B) **DÊ**, em $cm^3$, o volume do recipiente, o volume de cada esfera e o volume do líquido dentro do recipiente.

**13.** (UFSM-RS) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone circular reto são iguais. Se o raio da base do cone mede 4 cm e o volume do cone é $16\pi$ cm$^3$, o raio da esfera é dado por

A) $\sqrt{3}$ cm.

B) 2 cm.

C) 3 cm.

D) 4 cm.

E) $(4 + \sqrt{2})$ cm.

**14.** (UFMG) Um cilindro circular reto, cheio de água, tem raio igual a 24 cm. Mergulha-se nele uma esfera de 12 cm de raio até ficar totalmente coberta. Retirada a esfera, o nível de água baixa

A) 1 cm.

B) 2 cm.

C) 3 cm.

D) 4 cm.

E) 5 cm.

**15.** (UERJ) A Terra pode ser representada por uma esfera cujo raio mede 6 400 km. Na representação a seguir, está indicado o trajeto de um navio do ponto **A** ao ponto **C**, passando por **B**.

Qualquer ponto da superfície da Terra tem coordenadas (x, y), em que **x** representa a longitude e **y**, a latitude. As coordenadas dos pontos **A**, **B** e **C** estão indicadas na tabela a seguir:

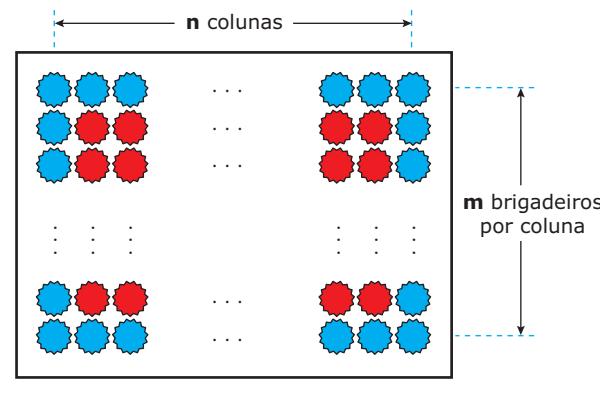
| Pontos | Coordenadas | |
|---|---|---|
| | x | y |
| A | 135º | 0º |
| B | 135º | 60º |
| C | 90º | 60º |

Considerando $\pi$ igual a 3, a distância **MÍNIMA**, em quilômetros, a ser percorrida pelo navio no trajeto ABC é igual a

A) 11 200

B) 10 800

C) 8 800

D) 5 600

**16.** (UERJ–2009) Observe o dado ilustrado a seguir, formado a partir de um cubo, e com suas seis faces numeradas de 1 a 6.

Esses números são representados por buracos deixados por semiesferas idênticas retiradas de cada uma das faces. Todo o material retirado equivale a 4,2% do volume total do cubo. Considerando $\pi = 3$, a razão entre a medida da aresta do cubo e a do raio de uma das semiesferas, expressas na mesma unidade, é igual a

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10

**17.** (Unicamp-SP–2009) Em uma bandeja retangular, uma pessoa dispôs brigadeiros formando **n** colunas, cada qual com **m** brigadeiros, como mostra a figura a seguir. Os brigadeiros foram divididos em dois grupos. Os que estavam mais próximos das bordas da bandeja foram postos em forminhas azuis, enquanto os brigadeiros do interior da bandeja foram postos em forminhas vermelhas.

Legenda

Forminhas azuis

Forminhas vermelhas

A) Sabendo que $m = \frac{3n}{4}$ e que a pessoa gastou o mesmo número de forminhas vermelhas e azuis, **DETERMINE** o número de brigadeiros da bandeja.

B) Se a pessoa compra a massa do brigadeiro já pronta, em latas de 1 litro, e se cada brigadeiro, antes de receber o chocolate granulado que o cobre, tem o formato de uma esfera de 2 cm de diâmetro, quantas latas ela tem que comprar para produzir 400 brigadeiros? (Dica: lembre-se de que 1 litro corresponde a 1 000 cm$^3$.)

# SEÇÃO ENEM

**01.** (Enem–2009) Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

$\left(\text{Volume da esfera: } v_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}\right)$

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio **R** da esfera assim construída é igual a

A) 15
B) 12
C) 24
D) $3\sqrt[3]{60}$
E) $6\sqrt[3]{30}$

**02.** (Enem–2010) Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

| | |
|---|---|
| 1 385 km | Toda água do planeta 1,39 bilhões de km³ |
| 406 km | Água doce do planeta 35,03 milhões de km³ |
| 272 km | Água doce subterrânea 10,53 milhões de km³ |
| 58 km | Água doce superficial 104,59 mil de km³ |

*Guia do Estudante:* Atualidades e Vestibulares + ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

A) $\frac{1}{343}$
B) $\frac{1}{49}$
C) $\frac{1}{7}$
D) $\frac{29}{136}$
E) $\frac{136}{203}$

## GABARITO

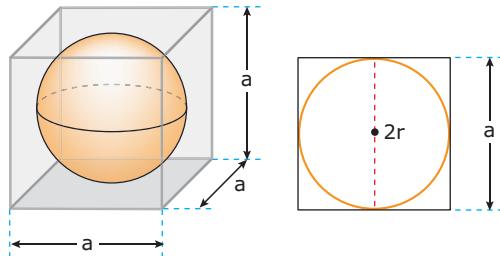
### Fixação

01. C
02. B
03. E
04. A) $\frac{\pi R^2}{3}$ cm²
    B) $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm²
05. D

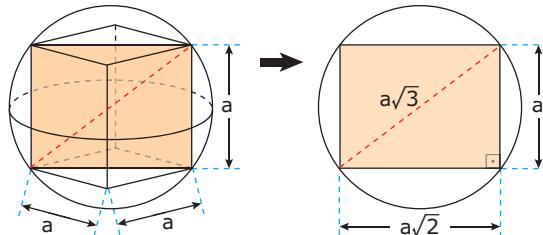
### Propostos

01. D
02. A) $r = \frac{R}{2}$
    B) 6
03. E
04. C
05. C
06. E
07. A) 34,325 L
    B) $\sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}$ dm
08. E
09. A
10. C
11. D
12. A) 2 400 cm² e 48 cm²
    B) 9 000 cm³, 32 cm³ e 6 120 cm³
13. C
14. D
15. C
16. D
17. A) 48 brigadeiros
    B) 2 latas

### Seção Enem

01. D
02. A

# Inscrição de sólidos

## ESFERA E CUBO

Vamos calcular o raio **r** da esfera inscrita em um cubo de aresta **a**. Seja a figura:

O diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo. Assim:

$$2r = a$$

$$r = \frac{a}{2}$$

Vamos calcular o raio **R** da esfera circunscrita a um cubo de aresta **a**. Seja a figura:

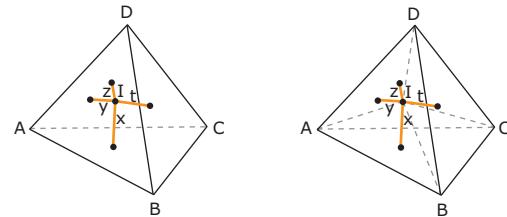
O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo. Assim:

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

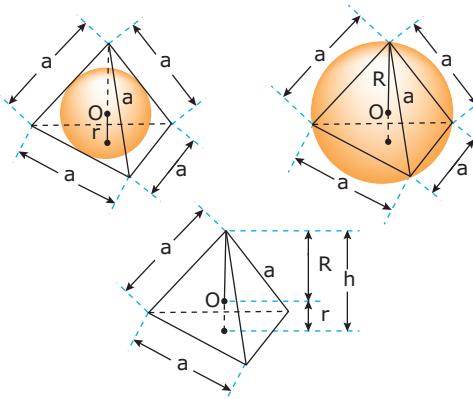
## ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

Inicialmente, vejamos uma propriedade dos tetraedros regulares:

> Num tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.

Sendo **I** um ponto interior e **x**, **y**, **z** e **t** as respectivas distâncias às faces ABC, ABD, ACD e BCD, queremos provar que:

$$x + y + z + t = h$$

Em que **h** é a altura do tetraedro.

**Demonstração:**

De fato, a soma dos volumes das pirâmides IABC, IABD, IACD e IBCD é igual ao volume de ABCD.

Sendo **S** a área de uma face do tetraedro, temos:

$$\frac{1}{3}Sx + \frac{1}{3}Sy + \frac{1}{3}Sz + \frac{1}{3}St = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow x + y + z + t = h$$

Agora, vamos calcular o raio **r** da esfera inscrita e o raio **R** da esfera circunscrita.

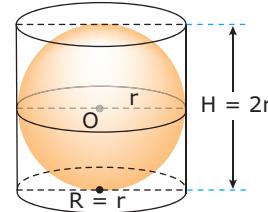
Sendo o centro **O** um ponto interior do tetraedro regular, vale a propriedade anterior, isto é:

$x + y + z + t = h$ e, com $x = y = z = t = r$, temos:

$$4r = h$$

$$r = \frac{1}{4}h$$

E como $R + r = h$, então:

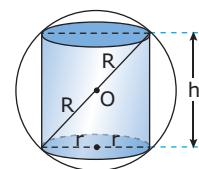
$$R = \frac{3}{4}h$$

Como a altura do tetraedro regular é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, temos:

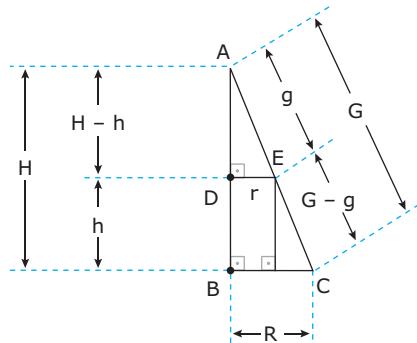
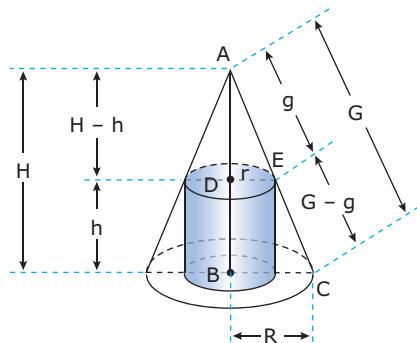
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12} \quad \text{e} \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

## CILINDRO E CONE

Vamos relacionar as medidas de um cilindro reto e de um cone reto circunscrito a esse cilindro. Veja a figura:

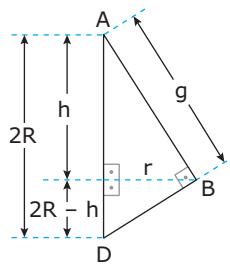
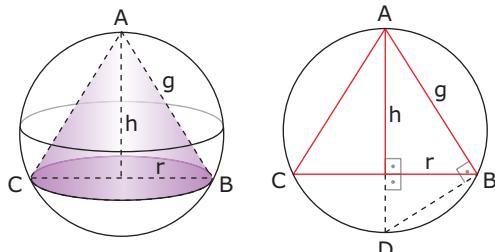
Usando semelhança entre os triângulos da figura, temos:

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$$

## CILINDRO E ESFERA

O cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero, cujo raio da base é igual ao raio da esfera.

O raio da base **r** e a altura **h** de um cilindro inscrito em uma esfera de raio **R** obedecem à relação:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$

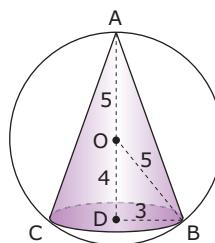
## ESFERA E CONE RETO

Veja a figura de uma esfera inscrita em um cone reto, em que **O** é o centro da esfera inscrita no cone, e **D** é o ponto de tangência entre a esfera e o cone.

Usando semelhança entre os triângulos da figura, temos:

$$\Delta ADO \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{r}{R} = \frac{H-r}{G}$$

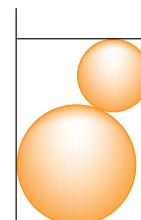
Podemos obter **x** aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADO:

$$x^2 = (H - r)^2 - r^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{H(H - 2r)}}$$

Analisemos, agora, uma esfera circunscrita a um cone reto.

Das relações métricas no triângulo retângulo ABD, temos:

$$\boxed{g^2 = 2Rh} \quad \text{e} \quad \boxed{r^2 = h(2R - h)}$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

**01.** (PUC-SP) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura a seguir:

O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

A) 26,4%

B) 21,4%

C) 19,5%

D) 18,6%

E) 16,2%

***Resolução:***

Seja **O** o centro da esfera. Trace o raio OB da esfera. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ODB, temos:

$OB^2 = DB^2 + OD^2 \Rightarrow (5)^2 = (3)^2 + OD^2 \Rightarrow$
OD = 4 cm, pois OD > 0

Daí, a altura **h** do cone é:
h = 5 + 4 = 9 cm

Logo, o volume $V_C$ do cone é:

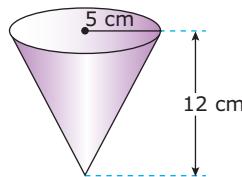
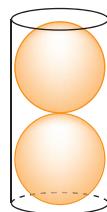
$$V_C = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}.\pi(3)^2.9 = 27\pi \text{ cm}^3$$

O volume $V_E$ da esfera é:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, percentualmente, o volume do cone corresponde ao volume da esfera em

$$\frac{V_C}{V_E} = \frac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = 27\pi.\frac{3}{500\pi} = \frac{81}{500} = 0{,}162 = 16{,}2\%$$

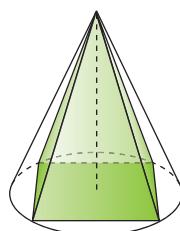
## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UERJ) Duas esferas metálicas maciças de raios iguais a 8 cm e 5 cm são colocadas, simultaneamente, no interior de um recipiente de vidro com forma cilíndrica e diâmetro da base medindo 18 cm. Nesse recipiente, despeja-se a menor quantidade possível de água para que as esferas fiquem totalmente submersas, como mostra a figura.

Posteriormente, as esferas são retiradas do recipiente. A altura da água, em cm, após a retirada das esferas, corresponde, aproximadamente, a

A) 10,6

B) 12,4

C) 14,5

D) 25,0

**02.** (Unicamp-SP) Uma esfera de 4 cm de raio cai numa cavidade cônica de 12 cm de profundidade, cuja abertura tem 5 cm de raio. **DETERMINE** a distância do vértice da cavidade à esfera.

**03.** (UFRGS–2006) Duas esferas de raio **r** foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura 4r, raio da base **r** e espessura desprezíveis, como na figura a seguir:

Nessas condições, a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas é

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**04.** (UFU-MG) Em um cubo de aresta **a**, considere um ponto **P** situado em uma das arestas e que dista $\frac{a}{4}$ de um dos vértices do cubo. Chame de **O** o centro da esfera inscrita no cubo e de **Q** o ponto da esfera situado sobre o segmento $\overline{OP}$. A distância de **P** a **Q** é igual a

A) $\frac{a}{8}$

B) $\frac{a}{4}$

C) $\frac{a}{4}(\sqrt{5} - 2)$

D) $\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$

**05.** (UFOP-MG) Uma pirâmide reta de base quadrada está inscrita num cone reto de raio da base $2\sqrt{2}$ cm. A relação entre os volumes do cone e da pirâmide, nessa ordem, é

A) $\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{\pi}{3}$

C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{3\pi}{2}$

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

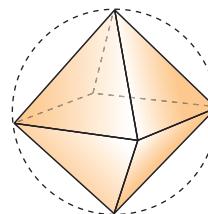
**01.** (UFMG) A razão entre as áreas totais de um cubo e do cilindro reto nele inscrito, nessa ordem, é

A) $\frac{2}{\pi}$

B) $\frac{3}{\pi}$

C) $\frac{4}{\pi}$

D) $\frac{5}{\pi}$

E) $\frac{6}{\pi}$

**02.** (Mackenzie-SP) Seja $36\pi$ o volume de uma esfera circunscrita a um cubo. Então, a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo é

A) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

B) $\frac{8\pi}{3}$

C) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

E) $\sqrt{3}\pi$

**03.** (PUC-SP) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita num cubo de aresta **a**. A área total da pirâmide é igual a

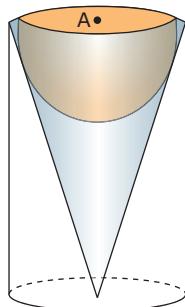
A) $a^2$

B) $a^2\sqrt{5}$

C) $a^2(\sqrt{5} + 1)$

D) $a^2(2 + \sqrt{5})$

E) $a^2(5 + \sqrt{5})$

**04.** (PUC-SP–2006) De um cristal de rocha, com o formato de uma esfera, foi lapidada uma joia na forma de um octaedro regular, como mostra a figura a seguir:

Se tal joia tem $9\sqrt{2}$ cm³ de volume, quantos centímetros cúbicos de rocha foram retirados do cristal original para lapidá-la? Use: $\pi = 3$

A) $36\sqrt{2}$

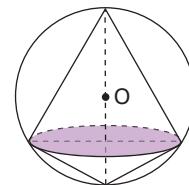
B) $32\sqrt{2}$

C) $24\sqrt{2}$

D) $18\sqrt{2}$

E) $12\sqrt{2}$

**05.** (UFPE) Indique o valor da área lateral, em cm², do sólido cujos vértices são os centros de simetria das faces de um cubo de aresta medindo **L** cm.

A) $L\sqrt{3}$

B) $L^2\sqrt{3}$

C) $L^2\sqrt{2}$

D) $3L^2$

E) $5L^2$

**06.** (CEFET-MG–2010) Um pilão de madeira, apoiado sobre hastes de metal, no formato de um cone circular reto de base com centro em **A**, foi esculpido por um artesão, conforme a figura.

Para garantir uma boa proporcionalidade, a cuia do pilão foi esculpida na forma de uma semiesfera tangente ao cone, de maneira que o seu centro coincidisse com o ponto **A**. Sabendo-se que o pilão ficou com altura de $\sqrt{3}$ m e o cone, com raio da base igual a 1 m, o volume de madeira contido na peça, em $m^3$, é

A) $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

B) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

E) $\sqrt{3}\pi$

**07.** (UFRRJ) Em uma caixa-d'água cúbica, vazia, de lado 2 m, é colocada, cheia de água, uma esfera inscrita, com a espessura da parede desprezível. Estoura-se a esfera e retiram-se seus resíduos. Qual a altura de água que permanecerá dentro da caixa?

**08.** (UFU-MG) A área de uma esfera, a área total do cilindro equilátero circunscrito a ela e a área total do cone equilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números

A) 1, 2, 4
B) 3, 4, 5
C) 4, 6, 9
D) 1, 2, 3
E) 2, 4, 7

**09.** (FUVEST-SP) Numa caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo, de dimensões 26 cm, 17 cm e 8 cm, que deve ser tampada, coloca-se a maior esfera que nela couber. O **MAIOR** número de esferas iguais a essa que cabem juntas na caixa é

A) 1
B) 2
C) 4
D) 6
E) 8

**10.** (PUCPR) A área total de um octaedro regular inscrito numa esfera de área $36\pi$ $cm^2$ é

A) $18\sqrt{3}$ $cm^2$.
B) $24\sqrt{3}$ $cm^2$.
C) $36\sqrt{3}$ $cm^2$.
D) $48\sqrt{3}$ $cm^2$.
E) $54\sqrt{3}$ $cm^2$.

**11.** (UFJF-MG) Se em um cubo o raio da esfera inscrita mede 2 cm, o raio da esfera circunscrita a esse cubo é igual a

A) $4\sqrt{2}$ cm.
B) $4\sqrt{3}$ cm.
C) $2\sqrt{2}$ cm.
D) $2\sqrt{3}$ cm.
E) $3\sqrt{2}$ cm.

**12.** (UFMG) Um cone circular reto de eixo vertical, com altura igual a $\sqrt{3}$ m e raio da base igual a 1 m, está cheio de água. Uma esfera é colocada no cone até se apoiar na parede do mesmo, de modo que os centros da esfera e da base do cone coincidam. Retirada a esfera, qual o volume da água que fica no cone?

**13.** (Fatec-SP) A interseção de um plano $\alpha$ com uma esfera de raio **R** é a base comum de dois cones circulares retos, como mostra a região sombreada da figura a seguir:

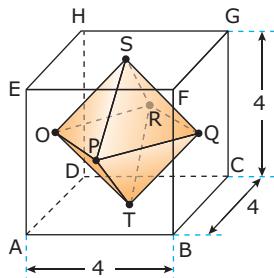
Se o volume de um dos cones é o dobro do volume do outro, a distância do plano $\alpha$ ao centro **O** é igual a

A) $\frac{R}{5}$

B) $\frac{R}{4}$

C) $\frac{R}{3}$

D) $\frac{2R}{5}$

E) $\frac{2R}{3}$

**14.** (UFU-MG) Considere que cada vértice de um cubo de aresta 1 cm é também o centro de uma esfera de raio $\frac{1}{2}$ cm. O volume da região do espaço interna ao cubo e externa às oito esferas é igual a

A) $\frac{12-\pi}{12}$ $cm^3$.

B) $\frac{3-\pi}{3}$ $cm^3$.

C) $\frac{6-\pi}{6}$ $cm^3$.

D) $\frac{2-\pi}{2}$ $cm^3$.

MATEMÁTICA

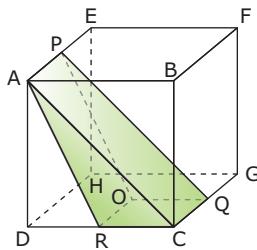
**15.** (Mackenzie-SP) A razão entre o volume de um cone, de altura igual a 4 vezes o raio da esfera inscrita, e o volume dessa esfera é

A) 2

B) 3

C) 4

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{4}{5}$

**16.** (UFMG–2007) Nesta figura, estão representados o cubo ABCDEFGH e o sólido OPQRST.

Cada aresta do cubo mede 4 cm, e os vértices do sólido OPQRST são os pontos centrais das faces do cubo. Então, é **CORRETO** afirmar que a área lateral total do sólido OPQRST mede

A) $8\sqrt{2}$ cm².

B) $8\sqrt{3}$ cm².

C) $16\sqrt{2}$ cm².

D) $16\sqrt{3}$ cm².

**17.** (UFMG–2006) Nesta figura, estão representados o cubo ABCDEFGH e o prisma ACRPQO.

Sabe-se que

I) **P**, **Q** e **R** são, respectivamente, os pontos médios das arestas AE, CG e CD.

II) o ponto **O** é o centro da face CDGH.

III) o volume do prisma ACRPQO é 24 cm³.

Então, é **CORRETO** afirmar que o comprimento de cada aresta desse cubo é

A) $4\sqrt[3]{2}$ cm.

B) $2\sqrt[3]{3}$ cm.

C) $4\sqrt[3]{3}$ cm.

D) $2\sqrt[3]{2}$ cm.

# SEÇÃO ENEM

**01.** (Enem–2009) Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira na forma de um cubo para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13 824 cm³, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

A) 4 B) 8 C) 16 D) 24 E) 32

**02.** (Enem–2003) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

**03.** (Enem–2009) Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte. Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

A) 10 viagens

B) 11 viagens

C) 12 viagens

D) 24 viagens

E) 27 viagens

## GABARITO

### Fixação

01. C
02. 6,4 cm
03. D
04. B
05. C

### Propostos

01. C
02. A
03. C
04. D
05. B
06. A
07. $h = \frac{\pi}{3}$ m
08. C
09. D
10. C
11. D
12. $V_{água} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ m³
13. C
14. C
15. A
16. D
17. C

### Seção Enem

01. B
02. C
03. C

# MATEMÁTICA

## Logaritmos

MÓDULO 11 FRENTE C

## INTRODUÇÃO

No ano de 1614, foi lançada a obra *Mirifice logarithmorum canonis descriptio*, que significa "*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*". Tal obra, escrita pelo nobre escocês John Napier (1550-1617), provocou uma verdadeira revolução na Matemática da época, bem como nas áreas relacionadas à astronomia e à navegação, ao apresentar um método que diminuiu enormemente o tempo gasto na realização dos cálculos que os estudiosos dessas áreas efetuavam frequentemente. Coube ao inglês Henry Briggs (1561-1630) o aperfeiçoamento desse método, através da elaboração da chamada *Tábua de logaritmos decimais*, que permitia escrever qualquer número positivo como uma potência de dez.

Com o surgimento das calculadoras científicas, as tábuas logarítmicas perderam a sua utilidade. Porém, o conceito de logaritmo continua sendo um dos mais importantes da Matemática, e o seu uso é fundamental na abordagem de diversos problemas das mais variadas áreas do conhecimento.

## DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Imaginemos o seguinte problema:

A qual expoente devemos elevar o número 3 de modo a obtermos 243?

Observe que o problema anterior pode ser descrito através da seguinte equação exponencial:

$3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

A partir de agora, diremos que 5 é o logaritmo de 243 na base 3. Com isso, promovemos uma mudança na notação utilizada. Assim, escrevemos:

$\log_3 243 = 5$

Portanto, observamos que as expressões descritas anteriormente são equivalentes, ou seja:

$\log_3 243 = 5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$

Podemos generalizar essa ideia do seguinte modo:

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de **b** na base **a** o expoente real **x** que se deve dar à base **a** de modo que a potência obtida seja igual a **b**.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$$

Em que:

**i)** **b** é o logaritmando.

**ii)** **a** é a base.

**iii)** **x** é o logaritmo.

**Exemplo**

Calcular o valor de cada logaritmo a seguir:

**1º)** $\log_2 32$

***Resolução:***

$\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

**2º)** $\log_{0,2} 625$

***Resolução:***

$\log_{0,2} 625 = x \Rightarrow 0{,}2^x = 625 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 625 \Rightarrow$

$5^{-x} = 5^4 \Rightarrow x = -4$

OBSERVAÇÕES

**i)** As condições de existência do logaritmo $\log_a b$ são:

$$b > 0 \text{ e } 0 < a \neq 1$$

**ii)** Quando a base de um logaritmo é igual a 10 (logaritmo decimal), esta pode ser omitida.

**Exemplo:** $\log_{10} 5$ pode ser escrito como log 5.

**iii)** Quando a base do logaritmo é o número ***e*** (*e* = 2,71828...), esse logaritmo é chamado **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural** e é representado pela notação ln.

**Exemplo:** $\log_e 18$ pode ser escrito como ln 18.

## CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

Considerando a definição de logaritmo e suas condições de existência, temos:

**i)** $\log_a a = 1$, pois $a = a^1$;

**ii)** $\log_a 1 = 0$, pois $1 = a^0$;

**iii)** $\log_a a^k = k$, pois $a^k = a^k$;

**iv)** $a^{\log_a b} = b$.

Justificativa de **iv**:

Seja $a^{\log_a b} = x$ (I)

Queremos mostrar que x = b.

Fazendo $\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$ (II).

Substituindo (II) na expressão (I), obtemos $a^y = x$ (III).

Igualando os valores de $a^y$ nas expressões (II) e (III), obtemos x = b.

## PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Sendo **a**, **b** e **c** números reais e positivos, e $a \neq 1$, temos:

**i)** $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$;

**ii)** $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

**iii)** $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;

**iv)** $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01.** Sendo $\log_2 x = 3$, $\log_2 y = 5$ e $\log_2 z = 7$, calcular o valor de $\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z}$, considerando satisfeitas as condições de existência.

***Resolução:***

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z} = \log_2 x^{\frac{3}{5}} - (\log_2 y^2 + \log_2 z) \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z} = \frac{3}{5}\log_2 x - 2\log_2 y - \log_2 z \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z} = \frac{3}{5}.3 - 2.5 - 7 = -\frac{76}{5}$$

**02.** (UFMG) A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, em que **E** é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (KWh), e $E_0 = 10^{-3}$ KWh. A cada aumento de uma unidade no valor de **I**, o valor de **E** fica multiplicado por

A) $10^{\frac{1}{2}}$

B) 10

C) $10^{\frac{3}{2}}$

D) $\frac{20}{3}$

***Resolução:***

Sabemos que $I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$. Seja **k** o número pelo qual o valor de **E** fica multiplicado a cada aumento de uma unidade no valor de **I**. Assim, temos:

$$I + 1 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}.k\right) \Rightarrow I + 1 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) + \frac{2}{3}.\log_{10} k \Rightarrow$$

$$I + 1 = I + \frac{2}{3}.\log_{10} k \Rightarrow \log_{10} k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = 10^{\frac{3}{2}}$$

## MUDANÇA DE BASE

Considere o logaritmo $\log_a b$, em que $b > 0$ e $0 < a \neq 1$. Se desejarmos escrever esse logaritmo em uma base **c**, em que $0 < c \neq 1$, utilizaremos a seguinte propriedade:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo } \log_c a \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.$$

**Exemplos**

**1º)** Escrever $\log_7 5$ na base 2.

***Resolução:***

$$\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$$

**2º)** Escrever $\log_3 4$ na base 4.

***Resolução:***

$$\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3} \Rightarrow (\log_3 4).(\log_4 3) = 1$$

Generalizando, se forem satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, temos que:

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1$$

## COLOGARITMO

É definido como o valor oposto ao do logaritmo. Assim, escrevemos:

$$\text{colog}_a b = -\log_a b$$

Observe também que $-\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)$

Portanto, podemos escrever que:

$$\text{colog}_a b = -\log_a b = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)$$

# EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São equações que envolvem logaritmos, em que as variáveis podem aparecer no logaritmando ou na base.

Assim, para resolvê-las, aplicamos a definição, as condições de existência e as propriedades dos logaritmos.

# EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**03.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação logarítmica:

$$\log_5 (3x - 18) = \log_5 6$$

***Resolução:***

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência (C.E.) de cada logaritmo. Assim, temos:

$3x - 18 > 0 \Rightarrow x > 6$

Em seguida, como as bases são iguais, devemos igualar também os logaritmandos.

Logo: $3x - 18 = 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

Como esse valor satisfaz a condição de existência ($x > 6$), então a solução da equação é $S = \{8\}$.

**04.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (1 - 5x) = -3$.

***Resolução:***

Aplicando a condição de existência, temos:

$1 - 5x > 0 \Rightarrow -5x > -1 \Rightarrow 5x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{5}$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$1 - 5x = 2^{-3} \Rightarrow 1 - 5x = \frac{1}{8} \Rightarrow 1 - \frac{1}{8} = 5x \Rightarrow$

$\frac{7}{8} = 5x \Rightarrow x = \frac{7}{40}$

Então, como $\frac{7}{40} < \frac{1}{5}$, satisfazendo a condição de existência, a solução da equação é $S = \left\{\frac{7}{40}\right\}$.

**05.** Determinar o conjunto solução da equação $\log_5 (x^2 - 4x) = \log_5 21$, em $\mathbb{R}$.

***Resolução:***

Inicialmente, verificamos a condição de existência:

$x^2 - 4x > 0$

**Observação:** Nesse caso, não julgamos necessário resolver a inequação de segundo grau, mas apenas indicá-la. Em seguida, resolvemos a equação e verificamos se cada uma das soluções satisfaz a condição de existência.

Como as bases são iguais, temos:

$x^2 - 4x = 21 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4.1.(-21) = 16 + 84 = 100$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2.1} = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = -3 \text{ ou } x_2 = 7$

Verificando as condições de existência, temos:

Para $x_1 = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 4.3 = 9 - 12 = -3 < 0$ (não convém)

Para $x_2 = 7 \Rightarrow 7^2 - 4.7 = 49 - 28 = 21 > 0$ (convém)

Portanto, a solução da equação é $S = \{7\}$.

**06.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (x + 7) - \log_2 (x - 11) = 2$.

***Resolução:***

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência de cada logaritmo. Assim, temos:

$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$ (condição I) e

$x - 11 > 0 \Rightarrow x > 11$ (condição II)

Como **x** deve atender simultaneamente às duas condições, temos que a interseção dessas é dada por $x > 11$.

Manipulando a equação, obtemos:

$\log_2 (x + 7) - \log_2 (x - 11) = 2 \Rightarrow$

$\log_2 \left[\frac{x+7}{x-11}\right] = 2 \Rightarrow \frac{x+7}{x-11} = 2^2 \Rightarrow$

$\frac{x+7}{x-11} = 4 \Rightarrow 4x - 44 = x + 7 \Rightarrow$

$3x = 51 \Rightarrow x = 17$

Como 17 satisfaz a condição de existência ($x > 11$), então a solução da equação é $S = \{17\}$.

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UFPR–2011) Um importante estudo a respeito de como se processa o esquecimento foi desenvolvido pelo alemão Hermann Ebbinghaus no final do século XIX. Utilizando métodos experimentais, Ebbinghaus determinou que, dentro de certas condições, o percentual **P** do conhecimento adquirido que uma pessoa retém após **t** semanas pode ser aproximado pela fórmula:

$$P = (100 - a).b^t + a$$

sendo que **a** e **b** variam de uma pessoa para outra. Se essa fórmula é válida para um certo estudante, com $a = 20$ e $b = 0{,}5$, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será

A) entre uma e duas semanas.

B) entre duas e três semanas.

C) entre três e quatro semanas.

D) entre quatro e cinco semanas.

E) entre cinco e seis semanas.

**02.** (FUVEST-SP) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale

A) $a^3$

B) $5a - 1$

C) $\frac{2a}{3}$

D) $1 + \frac{a}{3}$

E) $1 - \frac{a}{3}$

**03.** (Unifor-CE–2009) Em 1987, uma indústria farmacêutica iniciou a fabricação de certo tipo de medicamento e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 8% ao ano. Assim, em que ano a produção de tal medicamento quadruplicou a quantidade fabricada em 1987?

São dadas as aproximações: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48

A) 2002

B) 2003

C) 2004

D) 2005

E) 2006

**04.** (UEL-PR–2007) Considere **A**, **B** e **C** números reais positivos com $A \neq 1$, $B \neq 1$ e $C \neq 1$. Se $\log_A B = 2$ e $\log_C A = \frac{3}{5}$, conclui-se que o valor de $\log_B C$ é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{6}{5}$

**05.** (UFMG) O valor de **x** que satisfaz a equação $2.\log x + \log b - \log 3 = \log \frac{9b}{x^4}$, em que log representa o logaritmo decimal, pertence ao intervalo

A) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

B) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

C) [1, 2]

D) [2, 3]

E) [3, 4]

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (Mackenzie-SP–2010) Considerando a solução (x, y) do sistema $\begin{cases} \log_4 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_4 y = 0 \end{cases}$, com $x \neq 1$, o valor de $\log_x \left(\frac{x}{y}\right)$ é

A) 1

B) 4

C) –1

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{4}$

**02.** (FGV-SP) O valor da expressão

$$\left[\log_2 0,5 + \log_3 \sqrt{27} - \log_{\sqrt{2}} 8\right]^2 \text{ é}$$

A) $\frac{121}{4}$

B) $\frac{289}{4}$

C) $\frac{49}{4}$

D) $\frac{169}{4}$

E) N.d.a.

**03.** (UFU-MG–2010) Existem alguns esportes em que a sensação de liberdade e perigo convivem lado a lado. Este é o caso do esqui na neve. Suponha que um esquiador, ao descer uma montanha, seja surpreendido por uma avalanche que o soterra totalmente. A partir do instante em que ocorreu o soterramento, a temperatura de seu corpo decresce ao longo do tempo **t** (em horas), segundo a função T(t) dada por:

$T(t) = 3^t + \frac{36}{3^t}$ (**T** em graus Celsius), com $t \geq 0$

Quando a equipe de salvamento o encontra, já sem vida, a temperatura de seu corpo é de 12 graus Celsius. De acordo com as condições dadas, pode-se afirmar que ele ficou soterrado por, aproximadamente,

Utilize a aproximação: $\log_3 2 = 0,6$

A) 2h e 36 minutos.

B) 36 minutos.

C) 1h e 36 minutos.

D) 3h e 36 minutos.

**04.** (Unimontes-MG–2010) Se $\log_5 (a - b) = x$ e $a + b = 25$, então o valor de $\log_5 (a^2 - b^2)$, em função de **x**, é

A) x + 5

B) x – 2

C) x + 2

D) x – 5

**05.** (FGV-SP) A equação $\log_x (2x + 3) = 2$ apresenta o seguinte conjunto solução:

A) {–1, 3}

B) {–1}

C) {3}

D) {1, 3}

E) N.d.a.

**06.** (VUNESP) Se $x = \log_8 25$ e $y = \log_2 5$, então

A) x = y

B) 2x = y

C) 3x = 2y

D) x = 2y

E) 2x = 3y

**07.** (FUVEST-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então x – y é igual a

A) $\log_4 7$

B) $\log_{16} 7$

C) 1

D) 2

E) 0

**08.** (FEI-SP) Se log 2 = a e log 3 = b, escrevendo $\log \frac{32}{27}$ em função de **a** e **b**, obtemos

A) 2a + b
B) 2a – b
C) 2ab
D) $\frac{2a}{b}$
E) 5a – 3b

**09.** (FGV-SP) O valor de $5^{(-\log_5 3)(\log_3 7)}$ é

A) $\frac{1}{3}$
B) 3
C) 7
D) $\frac{1}{7}$
E) $\frac{1}{5}$

**10.** (UFMG) Seja $f(x) = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{x}{k}$, em que $k = 7.10^{-3}$. Pode-se, então, afirmar que o valor de **x** para o qual f(x) = 6 é

A) $7 \times 10^{12}$
B) $7 \times 10^{6}$
C) $7 \times 10^{3}$
D) $63 \times 10^{-3}$
E) $63 \times 10^{3}$

**11.** (UNESP–2006) O nível sonoro **N**, medido em decibéis (dB), e a intensidade **I** de um som, medida em watt por metro quadrado (W/m²), estão relacionados pela expressão:

$$N = 120 + 10.\log_{10}(I)$$

Suponha que foram medidos em certo local os níveis sonoros, $N_1$ e $N_2$, de dois ruídos com intensidades $I_1$ e $I_2$, respectivamente. Sendo $N_1 - N_2 = 20$ dB, a razão $\frac{I_1}{I_2}$ é

A) $10^{-2}$
B) $10^{-1}$
C) 10
D) $10^{2}$
E) $10^{3}$

**12.** (UFRGS) Sabendo-se que $\log_b a^2 = x$ e $\log_{b^2} a = y$, pode-se afirmar que **x** é igual a

A) y
B) $y^2$
C) $y^4$
D) 2y
E) 4y

**13.** (PUC RS–2006) Sabe-se que a representação gráfica da função **f** dada por $f(x) = a^x$, com a > 0 e a ≠ 1, passa pelos pontos (2, 16) e $\left(-2, \frac{1}{16}\right)$. Assim, o produto $\log_a\left(\frac{1}{16}\right).\log_a 16$ é igual a

A) –8
B) –4
C) –1
D) 1
E) 4

**14.** (UFC) O valor da soma

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) \text{ é}$$

A) 0
B) –1
C) –2
D) 2
E) 3

**15.** (UFMG) Seja $n = 8^{2.\log_2 15 - \log_2 45}$. Então, o valor de **n** é

A) $5^2$
B) $8^3$
C) $2^5$
D) $5^3$

**16.** (PUC-SP) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6 000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996? (Dados: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48)

A) 1998
B) 1999
C) 2000
D) 2001
E) 2002

**17.** (FUVEST-SP–2009) O número real **a** é o menor entre os valores de **x** que satisfazem a equação $2.\log_2\left(1 + \sqrt{2}x\right) - \log_2\left(\sqrt{2}x\right) = 3$. Então, $\log_2\left(\frac{2a+4}{3}\right)$ é igual a

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 1
D) $\frac{3}{2}$
E) 2

**18.** (UFES) O valor real de **m** para o qual as raízes da equação $(\log_3 x)^2 - m.\log_3 x = 0$ apresentam produto igual a 9 é

A) m = 9
B) m = 3
C) m = 2
D) $m = \frac{1}{9}$
E) $m = \frac{1}{3}$

**19.** (UFLA-MG–2009) As soluções da equação $4^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0$ são

A) x = 2 ou x = $\log_2 28$
B) x = 2 ou x = $\log_2 14$
C) x = $\frac{1}{2}$ ou x = $\log_2 28$
D) x = –2 ou x = $\log_2 14$

MATEMÁTICA

**20.** (UFU-MG–2007) Admitindo-se que a "luminosidade" L(x) da luz solar a **x** metros abaixo do nível do oceano seja dada, em luxes, pela função $L(x) = 1\,000.e^{-\frac{x}{10}}$ e que um mergulhador não consiga trabalhar sem luz artificial quando essa luminosidade fica inferior a 10% de seu valor na superfície, então a **MAIOR** profundidade, em metros, que o mergulhador pode atingir sem ter de usar luz artificial é igual a

A) 2.ln 10

B) ln 100

C) ln 20

D) 10.ln 10

## SEÇÃO ENEM

**01.** A figura a seguir mostra o telescópio espacial Hubble. Em órbita da Terra desde 1990, o Hubble tem ajudado alguns cientistas a ampliar o conhecimento acerca do Universo, por meio do estudo de astros extremamente distantes.

Disponível em: <http://1.bp.blogspot.com/_74NGIjeGaZE/TG3IbgTjgGI/AAAAAAAAAB4/24jCYMgiE7k/s1600/hubble.jpg>. Acesso em: 27 jun. 2011.

Um astrônomo estimou que a distância da Terra a um determinado corpo celeste era, aproximadamente, igual a $12^{30}$ km. Para saber o número de casas decimais correspondentes a essa medida, o astrônomo adotou o seguinte procedimento:

- Igualou o número $12^{30}$ a **x**;
- Tomou o logaritmo decimal nos dois membros da equação;
- De uma tabela, obteve os valores log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48;
- Resolvendo a equação, calculou o valor de **x**.

Assim, ele foi capaz de escrever essa medida como uma potência de base 10, cujo expoente é igual a

A) 32,4

B) 30,0

C) 28,4

D) 26,6

E) 25,4

**02.** Observe o texto a seguir:

**Projeção da população do Brasil**

**IBGE: população brasileira envelhece em ritmo acelerado**

Desde os anos 1960 que a taxa de crescimento da população brasileira vem experimentando paulatinos declínios, intensificando-se juntamente com as quedas mais pronunciadas da fecundidade. Desde o período 1950–1960 até o ano de 2008, a taxa de crescimento da população recuou de 3% para 1% ao ano, aproximadamente. Segundo as projeções, o país apresentará um potencial de crescimento populacional até 2039, quando se espera que a população atinja o chamado "crescimento zero". A partir desse ano serão registradas taxas de crescimento negativas, que correspondem à queda no número da população.

Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia_impressao.php?id_noticia=1272> (Adaptação). Acesso em: 27 jun. 2011.

Considerando que a população brasileira era de 70 milhões de habitantes em 1960, e que o ritmo de crescimento populacional se mantivesse no mesmo nível observado na década de 1950, a população brasileira chegaria a 350 milhões de habitantes por volta do ano

(Dados: log 2 = 0,301 e log 1,03 = 0,013)

A) 2014

B) 2018

C) 2020

D) 2034

E) 2040

## GABARITO

### Fixação

01. C  02. E  03. A  04. D  05. C

### Propostos

| | |
|---|---|
| 01. C | 11. D |
| 02. A | 12. E |
| 03. C | 13. B |
| 04. C | 14. C |
| 05. C | 15. D |
| 06. C | 16. E |
| 07. E | 17. B |
| 08. E | 18. C |
| 09. D | 19. A |
| 10. B | 20. D |

### Seção Enem

01. A  02. A

# MATEMÁTICA

## Função logarítmica

MÓDULO 12 FRENTE C

## INTRODUÇÃO

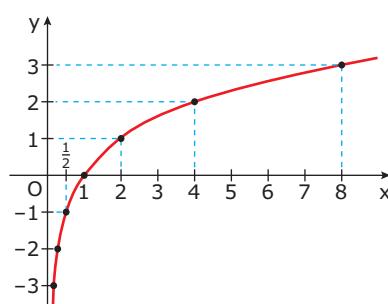
Chama-se função logarítmica toda função **f**, de domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo **x** o logaritmo $\log_a x$, sendo **a** um número real positivo e diferente de 1.

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid f(x) = \log_a x, \text{ em que } 0 < a \neq 1$$

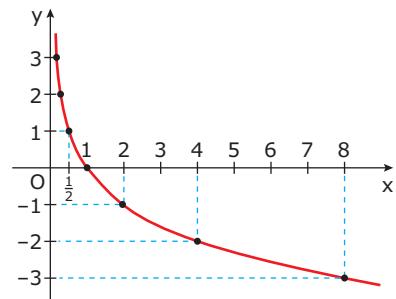
**Exemplos**

**1º)** $f(x) = \log_5 x$

**2º)** $f(x) = \log_{0,4} x$

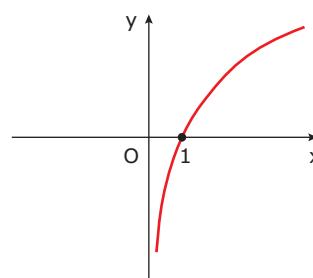
**3º)** $y = \ln x$

**4º)** $y = \log_{10} x$

## GRÁFICOS

Vamos construir os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Em cada caso, iremos atribuir alguns valores para **x** e, em seguida, calcularemos os correspondentes valores de **y**. Os pares ordenados obtidos serão usados para construir cada gráfico.

**1º)** Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

| x | y |
|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | −3 |
| $\frac{1}{4}$ | −2 |
| $\frac{1}{2}$ | −1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |

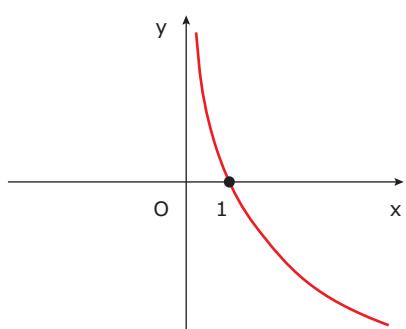
**2º)** Gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

| x | y |
|---|---|
| 8 | −3 |
| 4 | −2 |
| 2 | −1 |
| 1 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $\frac{1}{4}$ | 2 |
| $\frac{1}{8}$ | 3 |

OBSERVAÇÕES

**i)** Ambos os gráficos não interceptam o eixo das ordenadas. Isso ocorre porque a função logarítmica não está definida para $x = 0$.

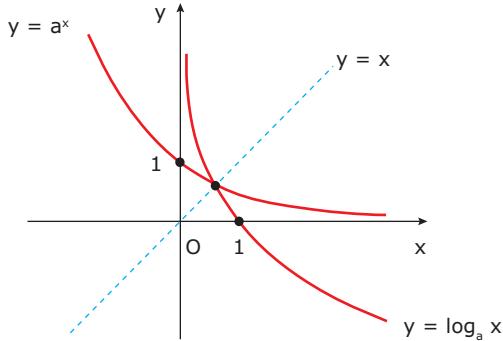
**ii)** Ambos os gráficos interceptam o eixo das abscissas no ponto (1, 0). Isso se deve ao fato de que $\log_a 1 = 0$, para qualquer número real **a** positivo e diferente de 1.

**iii)** O gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ é crescente. Isso ocorre porque a base do logaritmo é igual a 2, ou seja, é maior do que 1.

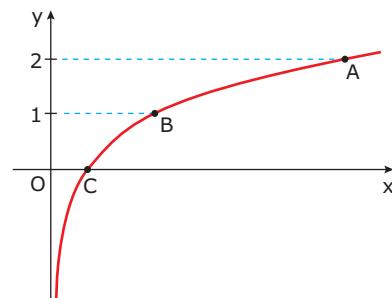
**iv)** O gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente. Isso ocorre porque a base do logaritmo é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, é um número maior do que 0 e menor do que 1.

De modo geral, há dois casos a serem considerados no esboço do gráfico da função $f(x) = \log_a x$:

**1º caso:** $a > 1$

**2º caso:** $0 < a < 1$

- Função decrescente
- Domínio $D = \mathbb{R}_+^*$
- Imagem $Im = \mathbb{R}$

OBSERVAÇÃO

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, é inversa da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $g(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$. Os gráficos das funções **f** e **g** são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$).

**1º caso:** $a > 1$

**2º caso:** $0 < a < 1$

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**01.** (UFJF-MG) A figura a seguir é um esboço, no plano cartesiano, do gráfico da função $f(x) = \log_b x$, com alguns pontos destacados. Supondo que a abscissa do ponto **A** é igual a 9, é **INCORRETO** afirmar que

A) a base **b** é igual a 3.
B) a abscissa de **C** é igual a 1.
C) $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$.
D) a abscissa de **B** é igual a 2.
E) $f(x)$ é crescente.

***Resolução:***

O ponto **A** possui abscissa 9 e ordenada 2. Substituindo, na expressão da função, temos:

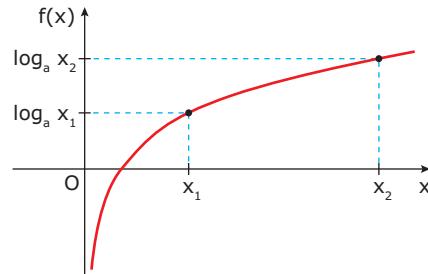
$\log_b 9 = 2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Portanto, a alternativa **A** está correta.

Para $f(x) = 0$, temos $\log_b x = 0 \Rightarrow x = 1$. Logo, a abscissa do ponto **C** é igual a 1. Portanto, a alternativa **B** está correta.

Para $0 < x < 1$, as correspondentes imagens são negativas. Portanto, a alternativa **C** está correta.

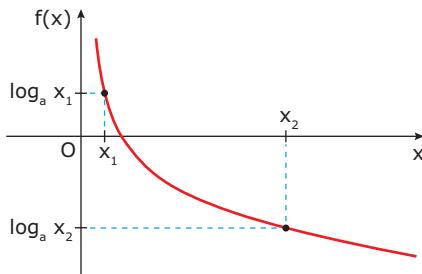
Para $f(x) = 1$, temos $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$. Portanto, a alternativa **D** está incorreta.

O gráfico representa uma função crescente, pois a base $b = 3 > 1$, ou seja, a alternativa **E** está correta.

# INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

É toda desigualdade em que a variável aparece no logaritmando ou na base do logaritmo. Há dois casos básicos:

Consideremos a função logarítmica $f(x) = \log_a x$.

**1º caso:** $a > 1$

O gráfico representa uma função crescente. Assim, observe que, para $\log_a x_1 < \log_a x_2$, temos $x_1 < x_2$.

Portanto:

> Se a > 1, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os logaritmandos.

**2º caso:** 0 < a < 1

O gráfico representa uma função decrescente. Assim, observe que, para $\log_a x_2 < \log_a x_1$, temos $x_2 > x_1$.

Portanto:

> Se 0 < a < 1, devemos **inverter** o sinal da desigualdade ao compararmos os logaritmandos.

OBSERVAÇÃO

Ao resolvermos uma inequação logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência dos logaritmos envolvidos. Portanto, a solução consiste na interseção dos intervalos obtidos da condição de existência dos logaritmos e da inequação logarítmica.

# EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**02.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\log_7 (x - 2) \leq \log_7 5$.

***Resolução:***

Verificamos, inicialmente, a condição de existência:

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (I)

Como 7 > 1, devemos conservar a desigualdade para os logaritmandos, ou seja:

$x - 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 7$ (II)

A solução é dada pela interseção dos intervalos (I) e (II).

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$.

**03.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\log_{\frac{1}{6}} (2x - 8) > \log_{\frac{1}{6}} x$.

***Resolução:***

Verificamos, inicialmente, as condições de existência:

$$\begin{cases} 2x - 8 > 0 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \quad \text{(I)} \\ \text{e} \\ x > 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Como $0 < \frac{1}{6} < 1$, devemos inverter a desigualdade para os logaritmandos, ou seja:

$2x - 8 < x \Rightarrow x < 8$ (III)

A solução é dada pela interseção dos intervalos (I), (II) e (III).

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 8\}$.

**04.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\log_2 7 + \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) \geq -3$.

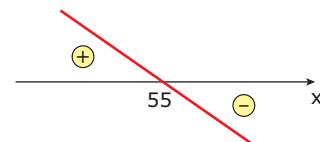
***Resolução:***

A condição de existência é dada por:

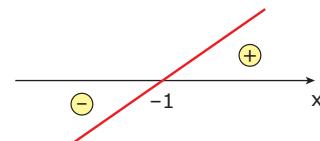
$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ (I)

$\log_2 7 + \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) \geq -3 \Rightarrow$

$\log_2 7 + \log_{2^{-1}} (x + 1) \geq -3 \Rightarrow$

$\log_2 7 - \log_2 (x + 1) \geq -3 \log_2 2 \Rightarrow$

$\log_2 \left(\frac{7}{x+1}\right) \geq \log_2 2^{-3} \Rightarrow \frac{7}{x+1} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow$

$$\frac{7}{x+1} - \frac{1}{8} \geq 0 \Rightarrow \frac{56 - x - 1}{8(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-x+55}^{\text{função I}}}{\underbrace{8x+8}_{\text{função II}}} \geq 0$$

Estudo do sinal:

Função I: $y_1 = -x + 55$

Raiz: $0 = -x + 55 \Rightarrow x = 55$

Função II: $y_2 = 8x + 8$

Raiz: $0 = 8x + 8 \Rightarrow x = -1$

Quadro de sinais:

Logo, o intervalo obtido da inequação logarítmica é $-1 < x \leq 55$ (II).

Fazendo a interseção de (II) com a condição de existência (I), temos como solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 55\}$.

# APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Há equações exponenciais que não conseguimos reduzir a potências de mesma base.

Assim, para resolvermos essas equações, devemos aplicar o logaritmo, em uma base adequada, dos dois lados da igualdade.

Esse artifício é utilizado devido ao fato de a função logarítmica ser a inversa da exponencial.

# EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**05.** Resolver a equação exponencial $4^x = 12$.
(Considerar log 2 = 0,30; log 3 = 0,48)

***Resolução:***

$4^x = 12 \Rightarrow \log 4^x = \log 12 \Rightarrow$

$x.\log 4 = \log (4.3) \Rightarrow$

$x.\log 2^2 = \log 2^2 + \log 3 \Rightarrow$

$2x.\log 2 = 2.\log 2 + \log 3 \Rightarrow$

$2x.0,30 = 2.0,30 + 0,48 \Rightarrow$

$0,60x = 1,08 \Rightarrow x = 1,8$

**06.** (UFOP-MG) A massa de certo material radioativo num instante **t** é dada por $m(t) = m_0.10^{-kt}$. Se **t** é dado em anos, $m_0 = m(0) = 500$ g é a massa inicial, m(20) = 400 g, adotando log 2 = 0,3 e log 5 = 0,7, encontrar

A) o valor de **k**.

B) o tempo necessário para que metade da massa inicial se desintegre.

***Resolução:***

A) Cálculo do valor de **k**:
Para t = 0, temos m(0) = 500.
Para t = 20, temos $m(20) = 500.10^{-20k} \Rightarrow$

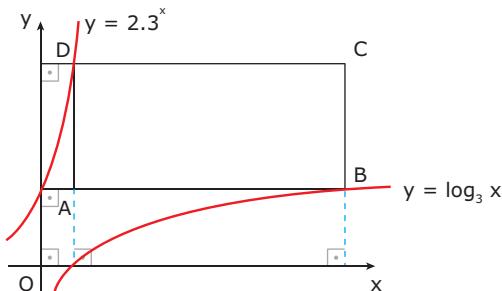
$400 = 500.10^{-20k} \Rightarrow \frac{4}{5} = 10^{-20k} \Rightarrow$

$\log 10^{-20k} = \log\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow -20\,k = \log 4 - \log 5 \Rightarrow$

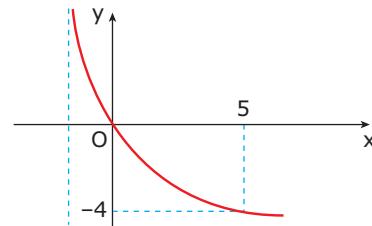
$-20\,k = 2.\log 2 - \log 5 \Rightarrow -20\,k = 2.0,3 - 0,7 \Rightarrow$

$-20\,k = 0,6 - 0,7 \Rightarrow -20\,k = -0,1 \Rightarrow k = \frac{1}{200}$

B) Temos que $m(t) = 500.10^{-\frac{t}{200}}$.
Queremos que m(t) = 250 g (metade da massa inicial).

$250 = 500.10^{-\frac{t}{200}} \Rightarrow \frac{1}{2} = 10^{-\frac{t}{200}} \Rightarrow$

$\log \frac{1}{2} = \log\left(10^{-\frac{t}{200}}\right) \Rightarrow \log 1 - \log 2 = -\frac{t}{200} \Rightarrow$

$0 - 0,30 = -\frac{t}{200} \Rightarrow t = 60$

O tempo necessário é igual a 60 anos.

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UNIFESP) Com base na figura, o comprimento da diagonal AC do quadrilátero ABCD, de lados paralelos aos eixos coordenados, é

A) $2\sqrt{2}$

B) $4\sqrt{2}$

C) 8

D) $4\sqrt{5}$

E) $6\sqrt{3}$

**02.** (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, está representado o gráfico da função $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{ax+b}\right)$. Então, f(1) é igual

A) –3

B) –2

C) –1

D) $-\frac{1}{2}$

E) $-\frac{1}{3}$

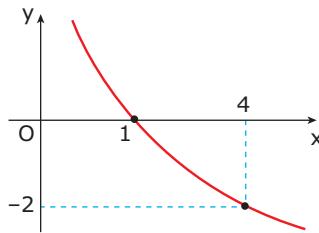
**03.** (Unimontes-MG–2007) O domínio da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_x (x - 1)(x + 1)$, é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 1\}$

**04.** (FGV-SP) A solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) > 0$ é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\sqrt{3} \text{ ou } \sqrt{3} < x < 2\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

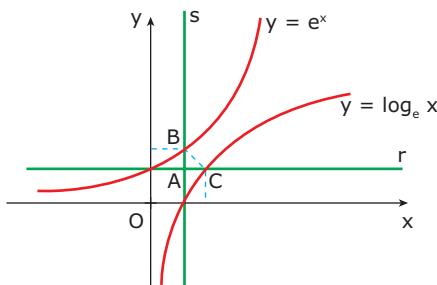
**05.** (FUVEST-SP–2006) O conjunto dos números reais **x** que satisfazem a inequação $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$ é o intervalo

A) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

B) $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$

C) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$

D) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$

E) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

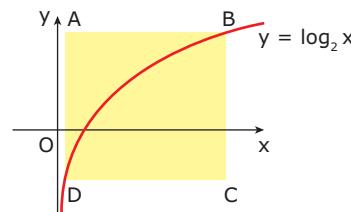
**01.** (UFSM-RS) O gráfico mostra o comportamento da função logarítmica na base **a**. Então, o valor de **a** é

A) 10

B) 2

C) 1

D) $\frac{1}{2}$

E) –2

**02.** (UFU-MG) No sistema de coordenadas cartesianas, considere os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = \log_e x$, como mostra a figura a seguir. Considerando r // Ox e s // Oy, construímos o triângulo ABC. Assim, pode-se afirmar que a área desse triângulo, em unidades de área, é

A) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}(e - 1)^2$

C) $\frac{1}{2}e^2$

D) $\frac{1}{2}(e - 1)^2$

**03.** (UFMG–2006) Neste plano cartesiano, estão representados o gráfico da função $y = \log_2 x$ e o retângulo ABCD, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

Sabe-se que

I) os pontos **B** e **D** pertencem ao gráfico da função $y = \log_2 x$.

II) as abscissas dos pontos **A** e **B** são, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e 8.

Então, é **CORRETO** afirmar que a área do retângulo ABCD é

A) 38,75

B) 38

C) 38,25

D) 38,5

**04.** (EFOA-MG–2006) Seja $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_4 x$. Sabendo-se que **a** e **b** satisfazem as equações $f(a) = 1 + f(b)$ e $a - b = 3f(2)$, é **CORRETO** afirmar que $a + b$ vale

A) $\frac{5}{2}$

B) 2

C) 3

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{5}$

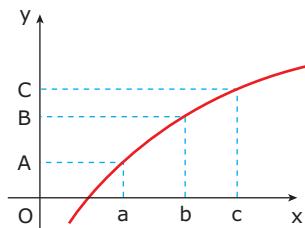
**05.** (FGV-SP–2010) Quantos números inteiros pertencem ao domínio da função $f(x) = \log (9 - x^2) + \log (2 - x)$?

A) 4

B) 3

C) 6

D) 5

E) Infinitos

**06.** (VUNESP) O par ordenado de números reais que não corresponde a um ponto do gráfico de $y = \log x$ é

A) (9, 2.log 3)

B) (1, 0)

C) $\left(\frac{1}{2}, -\log 2\right)$

D) $\left(\frac{1}{2^3}, -3.\log 2\right)$

E) $(-(5^2), -2.\log 5)$

**07.** (PUC Minas) O domínio da função $f(x) = \log_5(-x^2 + 3x + 10)$ é

A) $\mathbb{R}^*$

B) $\mathbb{R}_+^*$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq 5\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

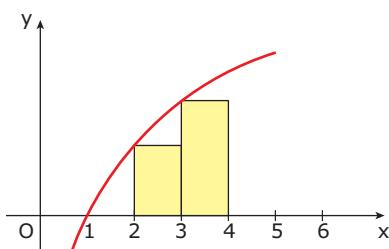
**08.** (FGV-SP–2010) Considere o gráfico das funções reais $f(x) = 2.\log x$ e $g(x) = \log 2x$, nos seus respectivos domínios de validade. A respeito dos gráficos de **f** e **g**, é **CORRETO** afirmar que

A) não se interceptam.

B) se interceptam em apenas um ponto.

C) se interceptam em apenas dois pontos.

D) se interceptam em apenas três pontos.

E) se interceptam em infinitos pontos.

**09.** (VUNESP) A figura representa o gráfico de $y = \log_{10} x$.

Sabe-se que AO = BC. Então, pode-se afirmar que

A) $\log_a b = c$

B) $a + b = c$

C) $a^c = b$

D) $ab = c$

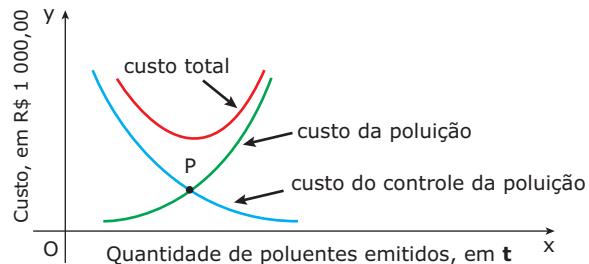
E) $10^a + 10^b = 10^c$

**10.** (UFG) Se a curva da figura representa o gráfico da função $y = \log x$, $x > 0$, o valor da área sombreada é

A) log 2

B) log 3

C) log 4

D) log 5

E) log 6

**11.** (Cesgranrio) O número de pontos de interseção dos gráficos de $y = 3.\log x$ e de $y = \log 9x$, sendo $x > 0$, é

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 9

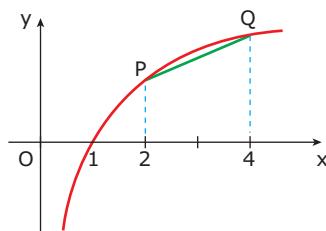
**12.** (UFU-MG–2008) Se $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e **S** é o conjunto solução da inequação $(\log n)^2 - 3.(\log n) + 2 \leq 0$, então é **CORRETO** afirmar que

A) **S** contém 4 múltiplos de 20.

B) **S** contém 90 elementos.

C) **S** contém 46 números ímpares.

D) **S** contém 46 números pares.

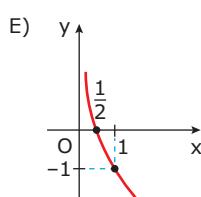
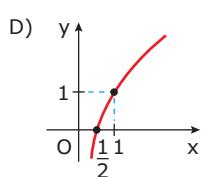
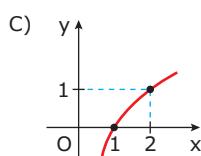
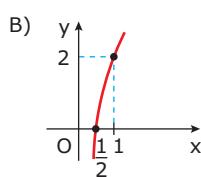
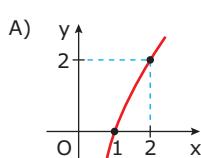
**13.** (UNIRIO-RJ) Uma indústria do Rio de Janeiro libera poluentes na Baía de Guanabara. Foi feito um estudo para controlar essa poluição ambiental, cujos resultados são a seguir relatados.

Do ponto de vista da comissão que efetuou o estudo, essa indústria deveria reduzir sua liberação de rejeitos até o nível em que se encontra **P**, admitindo-se que o custo total ideal é o resultado da adição do custo de poluição $y = 2^x - 1$ ao custo de controle da poluição $y = 6.\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para que se consiga o custo ideal, a quantidade de poluentes emitidos, em kg, deve ser, aproximadamente,

Considere: log 2 = 0,3 e log 3 = 0,4

A) 1 333

B) 2 333

C) 3 333

D) 4 333

E) 5 333

**14.** (UFF-RJ) A figura representa o gráfico da função **f** definida por $f(x) = \log_2 x$.

A medida do segmento PQ é igual a

A) $\sqrt{6}$

B) $\sqrt{5}$

C) $\log_2 5$

D) 2

E) log 2

**15.** (FUVEST-SP) Qual das figuras a seguir é um esboço do gráfico da função $f(x) = \log_2 2x$ ?

A)
B)
C)
D)
E)
**16.** (UFU-MG–2006) Uma peça metálica foi aquecida até atingir a temperatura de 50 °C. A partir daí, a peça resfriará de forma que, após **t** minutos, sua temperatura (em graus Celsius) será igual a $30 + 20.e^{-0,2t}$. Usando a aproximação $\ln 2 \cong 0,7$, **DETERMINE** em quantos minutos a peça atingirá a temperatura de 35 °C.

**17.** (PUC Minas) Se $\log_n 3 > \log_n 5$, então

A) $n < -1$

B) $n > 3$

C) $-1 < n < 0$

D) $0 < n < 1$

**18.** (Mackenzie-SP) O **MENOR** valor natural de **n** para o qual se tem $\dfrac{2.4.6.8. \ldots .2n}{1.2.3. \ldots .n} > \sqrt{\log 10^{100}}$ é

A) 2 B) 3 C) 4 D) 10 E) 100

**19.** (UFOP-MG–2010) A população de certo tipo de bactérias estudado por um pesquisador foi modelada da seguinte forma: $f(t) = a.\log_2 (t + 1) + bt^2 + 300$, onde **t** representa o tempo em horas no qual o pesquisador começou a observar essa população. O instante t = 0 é o início das observações, quando havia 300 bactérias nessa população. Suponha que, nos instantes t = 1 e t = 3, o número de bactérias era 350 e 540, respectivamente. Baseando-nos nessas informações, podemos afirmar que o aumento percentual no número de bactérias do instante t = 3 para t = 7 está entre

A) 65% e 75%.

B) 150% e 160%.

C) 35% e 45%.

D) 180% e 190%.

**20.** (UEL-PR–2008) O iodo-131 é um elemento radioativo utilizado em Medicina Nuclear para exames de tireoide e possui meia-vida de 8 dias. Para descarte de material contaminado com 1 g de iodo-131, sem prejuízo para o meio ambiente, o laboratório aguarda que o mesmo fique reduzido a $10^{-6}$ g de material radioativo. Nessas condições, o prazo **MÍNIMO** para descarte do material é de

Dado: $\log_{10} 2 \cong 0,3$

A) 20 dias.

B) 90 dias.

C) 140 dias.

D) 160 dias.

E) 200 dias.

# SEÇÃO ENEM

**01.** Segundo a escala Richter, a magnitude **M** de um terremoto é dada por:

$$M = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$$

sendo **A** a amplitude da onda sísmica em micrômetros ($\mu m$) e **f** a frequência da onda, em hertz (Hz). Os efeitos de um terremoto, de acordo com a sua magnitude, são apresentados a seguir:

| Magnitude (M) | Efeitos |
|---|---|
| Menor do que 3,5 | O terremoto não é sentido. |
| Entre 3,5 e 5,4 | Pode ser sentido. Raramente causa danos. |
| Entre 5,5 e 6,0 | Pode causar danos sérios a construções mal feitas. |
| Entre 6,1 e 6,9 | Pode ser destrutivo num raio de 100 km do epicentro. |
| Entre 7,0 e 7,9 | Grande terremoto. Causa grandes danos em uma grande faixa. |
| Acima de 8,0 | Enorme terremoto. Causa destruição em uma enorme faixa. |

Suponha que um terremoto tenha amplitude de 2 000 $\mu m$ e frequência de 0,1 Hz. Acerca desse terremoto, é possível afirmar que

(Considere: $\log_{10} 2 = 0{,}30$)

A) o terremoto não é sentido.

B) sua magnitude encontra-se entre 5,5 e 6,0.

C) é um grande terremoto.

D) sua magnitude é igual a 6,2.

E) é duas vezes mais destrutivo do que um terremoto com frequência 0,05 Hz.

**02.** Uma das grandezas relacionadas ao som é a sua altura **A**, medida em decibéis (dB). A altura de um som está relacionada com a sua intensidade **I**, medida em watts por metro quadrado, através da função

$$A(I) = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

sendo $I_0$ uma constante que vale $10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$.

Sabe-se que as intensidades sonoras aproximadas de um carro e de um avião a jato são iguais a $10^{-4}\ \frac{W}{m^2}$ e $10^{2}\ \frac{W}{m^2}$, respectivamente. Portanto, pode-se afirmar que a razão entre as alturas dos sons produzidos pelo avião e pelo carro, nessa ordem, é igual a

A) 1,75 B) 1,85 C) 1,95 D) 2,05 E) 2,35

## GABARITO

### Fixação

01. D
02. B
03. B
04. D
05. D

### Propostos

01. D
02. D
03. A
04. A
05. A
06. E
07. E
08. B
09. D
10. E
11. B
12. D
13. A
14. B
15. D
16. 7 minutos
17. D
18. C
19. B
20. D

### Seção Enem

01. B
02. A

# MATEMÁTICA

MÓDULO 11 FRENTE D

## Progressão aritmética

## SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência numérica é um grupo de números dispostos em uma ordem definida. Por exemplo, podemos considerar a sequência dos números naturais ímpares, dada por (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Observe que o exemplo citado refere-se a uma **sequência infinita**. Já o conjunto dos números primos naturais menores do que 10 é dado por (2, 3, 5, 7), ou seja, é um exemplo de uma **sequência finita**.

Uma sequência infinita pode ser representada da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$$

Em que

- $a_1$ indica o elemento da posição 1,
- $a_2$ indica o elemento da posição 2,
- $a_3$ indica o elemento da posição 3,

⋮

- $a_n$ indica o elemento da posição **n**.

### Lei de formação

Uma sequência numérica pode ser definida por uma fórmula ou lei de formação. Considere os seguintes exemplos:

**1º)** Escrever os 4 primeiros termos da sequência definida por $a_n = 4n + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

***Resolução:***

Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = 4.1 + 1 = 5$

Para $n = 2 \Rightarrow a_2 = 4.2 + 1 = 9$

Para $n = 3 \Rightarrow a_3 = 4.3 + 1 = 13$

Para $n = 4 \Rightarrow a_4 = 4.4 + 1 = 17$

Logo, a sequência é (5, 9, 13, 17).

**2º)** Escrever a sequência numérica definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n > 2 \end{cases}$$

***Resolução:***

Nesse caso, observe que os dois termos iniciais são dados. Os seguintes são obtidos por meio de uma regra, a chamada Fórmula de Recorrência, que utiliza os valores anteriores.

Assim, temos:

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

⋮

A sequência é dada por (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...). Essa sequência é conhecida como **Sequência de Fibonacci**.

## PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Chamamos de progressão aritmética (P.A.) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior com uma constante dada, denominada **razão da P.A.**, e indicada por **r**.

**Exemplos**

**1º)** (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...) é uma P.A. **crescente**, em que r = 3.

**2º)** (10, 8, 6, 4, 2, 0, ...) é uma P.A. **decrescente**, em que r = –2.

**3º)** (5, 5, 5, 5, ...) é uma P.A. **constante**, em que r = 0.

## Termo geral da P.A.

Considere a P.A. de razão **r** representada a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$$

Sabemos que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando-se essas igualdades membro a membro, obtemos:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + (a_n = a_1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + \underbrace{r + r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ vezes}}$$

Após efetuarmos as simplificações, obtemos a expressão:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Essa expressão é a fórmula do termo geral da P.A.

**Exemplo**

Calcular o trigésimo segundo termo da P.A. (1, 4, 7, 10, ...).

***Resolução:***

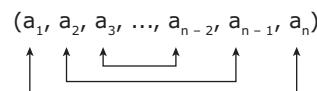
Temos que $a_1 = 1$ e $r = 3$. Logo:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{32} = 1 + (32 - 1)3 \Rightarrow$

$a_{32} = 1 + 31.3 \Rightarrow a_{32} = 94$

## Propriedades da P.A.

**i)** Cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética dos termos antecessor e sucessor. Em outras palavras, sendo uma P.A. (a, b, c, ...), temos:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Por exemplo, na P.A. (7, 12, 17, 22, ...), podemos observar que $12 = \frac{7 + 17}{2}$, $17 = \frac{12 + 22}{2}$, etc.

**ii)** A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos.

OBSERVAÇÃO

Dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos que precede um deles for igual ao número de termos que sucede o outro.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Por exemplo, considere a P.A. (5, 10, 15, 20, 25, 30).

Temos que $\underbrace{5 + 30}_{\text{soma dos extremos}} = \underbrace{10 + 25}_{\text{equidistantes dos extremos}} = \underbrace{15 + 20}_{\text{equidistantes dos extremos}} = 35$

**Notação Especial:**

Em vários problemas, a adoção de uma notação facilita bastante a determinação de uma P.A. Assim, temos as seguintes notações:

**i)** P.A. com 3 termos:

$$(a - r, a, a + r)$$

**ii)** P.A. com 4 termos:

$$(a - 3b, a - b, a + b, a + 3b)$$

Nesse caso, observe que a razão **r** é dada por:

$r = (a - b) - (a - 3b) \Rightarrow r = a - b - a + 3b \Rightarrow r = 2b$

Reescrevendo a sequência anterior, temos:

$$\left(a - \frac{3r}{2}, a - \frac{r}{2}, a + \frac{r}{2}, a + \frac{3r}{2}\right)$$

**iii)** P.A. com 5 termos:

$$(a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r)$$

**Exemplo**

A soma dos três primeiros termos de uma P.A. crescente é igual a 30. Sabendo que o produto desses termos é igual a 990, determinar a razão da P.A.

***Resolução:***

Vamos representar a P.A. do seguinte modo:

$(a - r, a, a + r, ...)$

Sabemos que:

$a - r + a + a + r = 30 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10$

Logo, a P.A. é dada por $(10 - r, 10, 10 + r)$.

Assim, temos:

$(10 - r).10.(10 + r) = 990 \Rightarrow 10^2 - r^2 = 99 \Rightarrow$

$r^2 = 100 - 99 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$

Como a P.A. é crescente, $r = 1$.

## Soma dos termos da P.A.

Considere a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$.

Seja $S_n$ o valor da soma dos seus **n** primeiros termos.

Assim, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Escrevendo $S_n$ em ordem inversa, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando-se membro a membro as duas expressões, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1)$$

Sabemos que a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja, podemos substituir $(a_2 + a_{n-1})$, $(a_3 + a_{n-2})$, ... por $(a_1 + a_n)$.

Logo:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{(n)\text{ vezes}} \quad (*)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos **n** termos de uma P.A.

(*) Se o número de termos de uma P.A. for ímpar, observe que teremos o seguinte:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{(n-1)\text{ vezes}} + 2.\underbrace{a_{\frac{n+1}{2}}}_{\text{termo central}} \Rightarrow$$

$$2S_n = (n - 1)(a_1 + a_n) + 2.a_{\frac{n+1}{2}} \quad (I)$$

Porém, o termo $a_{\frac{n+1}{2}}$ é igual à média aritmética dos termos antecessor e sucessor. Como a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, temos:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{\overbrace{a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+3}{2}}}^{\text{equidistantes dos extremos}}}{2} = \frac{\overbrace{a_1 + a_n}^{\text{soma dos extremos}}}{2}$$

Portanto, de (I), temos:

$$2S_n = (n - 1)(a_1 + a_n) + 2.\frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow$$

$$2S_n = (n - 1)(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \Rightarrow$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)(n - 1 + 1) \Rightarrow$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01.** Calcular a soma dos 10 primeiros termos da P.A. (1, 5, 9, 13, ...).

***Resolução:***

Inicialmente, vamos calcular $a_{10}$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{10} = 1 + (10 - 1)4 \Rightarrow$

$a_{10} = 1 + 36 \Rightarrow a_{10} = 37$

Sabemos que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} \Rightarrow$$

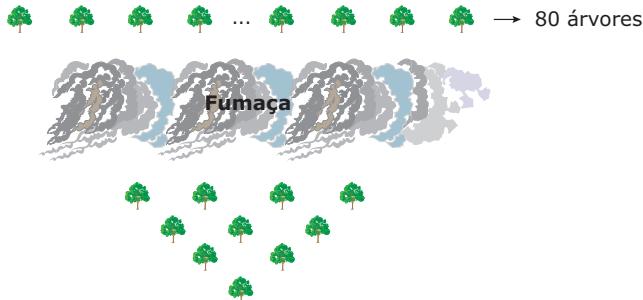
$$S_{10} = \frac{(1 + 37)10}{2} \Rightarrow S_{10} = 190$$

**02.** (VUNESP) Uma P.A. de 51 termos tem o vigésimo sexto termo igual a −38; então, a soma dos termos dessa progressão é

A) −900
B) −1 938
C) 969
D) 0
E) −969

***Resolução:***

Sabemos que o vigésimo sexto termo é o termo central dessa P.A. Portanto, temos:

$$a_{26} = \frac{a_1 + a_{51}}{2} \Rightarrow -38 = \frac{a_1 + a_{51}}{2} \Rightarrow a_1 + a_{51} = -76$$

A soma dos termos dessa progressão é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{51} = \frac{(a_1 + a_{51})51}{2} \Rightarrow$$

$$S_{51} = \frac{(-76)51}{2} \Rightarrow S_{51} = -1\,938$$

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UFLA-MG–2009) Um satélite utilizado para monitorar queimadas enviou a seguinte fotografia de um incêndio próximo a uma plantação de eucaliptos.

    ...       → 80 árvores

A imagem revela que há a possibilidade de o fogo atingir essa plantação. Pelo fato de a fumaça encobrir parte desse conjunto de árvores, só é possível visualizar as extremidades dessa plantação. Baseado no padrão espacial das árvores, uma estimativa do número total de árvores é

A) 1 980
B) 2 820
C) 3 240
D) 2 470

**02.** (Mackenzie-SP) Entre os inteiros **x**, tais que |x| < 60, aqueles não divisíveis por 4 são em número de

A) 90
B) 91
C) 92
D) 93
E) 94

**03.** (FUVEST-SP) Os números inteiros positivos são dispostos em "quadrados" da seguinte maneira:

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

| 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 |

| 19 | — | — |
|---|---|---|
| — | — | — |
| — | — | — |

O número 500 se encontra em um desses "quadrados". A "linha" e a "coluna" em que o número 500 se encontra são, respectivamente,

A) 2 e 2
B) 3 e 3
C) 2 e 3
D) 3 e 2
E) 3 e 1

**04.** (UNESP) Em 05 de junho de 2004, foi inaugurada uma pizzaria que só abre aos sábados. No dia da inauguração, a pizzaria recebeu 40 fregueses. A partir daí, o número de fregueses que passaram a frequentar a pizzaria cresceu em progressão aritmética de razão 6, até que atingiu a cota máxima de 136 pessoas, a qual tem se mantido. O número de sábados que se passaram, excluindo-se o sábado de inauguração, para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez foi

A) 15
B) 16
C) 17
D) 18
E) 26

**05.** (UEL-PR) Uma decoradora usou 210 garrafas plásticas de 33 cm de altura para confeccionar uma árvore de Natal em forma de triângulo. Para isso, usou uma placa triangular na qual colou as garrafas da seguinte forma: uma garrafa na primeira fila, duas na segunda fila, e assim sucessivamente, acrescentando uma garrafa a cada fila. Qual deve ser a altura da placa, sabendo que não há sobreposição de garrafas, não há espaço entre uma fila e outra e que sobram 10 cm no topo e 10 cm na base da árvore?

A) 3,8 m
B) 5,4 m
C) 6,6 m
D) 6,8 m
E) 7,13 m

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (FUVEST-SP) Sejam **a**, **b**, **c** três números estritamente positivos em progressão aritmética. Se a área do triângulo ABC, cujos vértices são A(–a, 0), B(0, b) e C(c, 0), é igual a **b**, então o valor de **b** é

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**02.** (FGV-SP–2010) Uma empresa projetou as receitas mensais para o ano 2010 do seguinte modo:

- A receita para janeiro é R$ 1 250 000,00.
- Em cada mês, a receita é R$ 40 000,00 superior à do mês anterior.

Nessas condições, a receita prevista para todo o ano de 2010 é

A) R$ 17 520 000,00.
B) R$ 17 560 000,00.
C) R$ 17 680 000,00.
D) R$ 17 600 000,00.
E) R$ 17 640 000,00.

**03.** (EFOA-MG–2006) Para arrecadar doações, uma entidade beneficente usou uma conta telefônica do tipo 0800. O número de pessoas que ligaram, por dia, variou de acordo com uma progressão aritmética de razão 4. Sabendo-se que cada doação foi de R$ 0,40 e que no primeiro dia duas pessoas ligaram, o número **MÍNIMO** de dias para de que o total arrecadado atingisse o valor de R$ 81 920,00 foi

A) 230
B) 280
C) 250
D) 320
E) 300

**04.** (PUC Minas) Na sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, ...\right)$, o termo de ordem 30 é

A) $\frac{29}{2}$

B) $\frac{61}{6}$

C) $\frac{21}{2}$

D) $\frac{65}{6}$

E) $\frac{67}{6}$

**05.** (PUC-Campinas-SP) Para todo número natural **n**, não nulo, os termos de três sequências, $a_n$, $b_n$ e $c_n$, estão relacionados entre si, conforme o esquema a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{x} & 8 & = & 10 & - & 2 \\ 2 & \text{x} & 8 & = & 20 & - & 4 \\ 3 & \text{x} & 8 & = & 30 & - & 6 \\ 4 & \text{x} & 8 & = & 40 & - & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \text{x} & 8 & = & b_n & - & c_n \end{array}$$

Assinale, a alternativa que tem os valores **CORRETOS** para $a_n$, $b_n$ e $c_n$.

A) $a_n$ = 83; $b_n$ = 830; $c_n$ = 160
B) $a_n$ = 125; $b_n$ = 1 200; $c_n$ = 250
C) $a_n$ = 350; $b_n$ = 3 500; $c_n$ = 680
D) $a_n$ = 423; $b_n$ = 4 230; $c_n$ = 846
E) $a_n$ = 504; $b_n$ = 5 000; $c_n$ = 1 008

**06.** (UERJ) Eddie Sortudo não deseja contar com a sorte e espera ganhar um pouco de tempo, acreditando que a munição do inimigo acabe. Suponha então que, a partir do primeiro número falado por Eddie, ele dirá, cada um dos demais, exatamente 3 segundos após ter falado o anterior, até que chegue ao número determinado pelo seu comandante.

HAGAR, o horrível — Chris Browne

O GLOBO

Assim, com sua estratégia, Eddie conseguirá ganhar um tempo, em segundos, igual a

A) 177
B) 188
C) 237
D) 240

**07.** (UECE) Seja ($a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$, $a_8$) uma progressão aritmética. Se $a_2 + a_5 = 8$ e $a_8 = 7$, então $a_3 + a_7$ é igual a

A) 8

B) $\frac{28}{3}$

C) 10

D) $\frac{32}{3}$

**08.** (PUC-SP) Seja **f** a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por f(x) é igual a:

$$\begin{cases} 2x - 1, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é par} \\ 0, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Nessas condições, a soma

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + ... + f(999) + f(1\,000)$ é igual a

A) 50 150

B) 100 500

C) 250 500

D) 500 500

E) 1 005 000

**09.** (UFV-MG–2010) As medidas dos lados de um triângulo retângulo são números em progressão aritmética de razão **r**. Se o cateto menor mede x – r e a área do triângulo é 30, então o valor de **r** é

A) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{7}$

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{5}$

**10.** (UNESP–2007) Um fazendeiro plantou 3 960 árvores em sua propriedade no período de 24 meses. A plantação foi feita mês a mês em progressão aritmética. No primeiro mês, foram plantadas **x** árvores, no mês seguinte (x + r) árvores, r > 0, e assim sucessivamente, sempre plantando no mês seguinte **r** árvores a mais do que no mês anterior. Sabendo-se que ao término do décimo quinto mês do início do plantio ainda restavam 2 160 árvores para serem plantadas, o número de árvores plantadas no primeiro mês foi

A) 50

B) 75

C) 100

D) 150

E) 165

**11.** (UNESP–2007) Considere os 100 primeiros termos de uma P.A. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}\}$. Sabendo-se que $a_{26} + a_{75} = 300$, o resultado da soma dos seus 100 primeiros termos é

A) 7 650

B) 15 000

C) 15 300

D) 30 000

E) 30 300

**12.** (PUC-Campinas-SP) Um pai resolve depositar todos os meses uma certa quantia na caderneta de poupança de sua filha. Pretende começar com R$ 5,00 e aumentar R$ 5,00 por mês, ou seja, depositar R$ 10,00 no segundo mês, R$ 15,00 no terceiro mês, e assim por diante. Após efetuar o décimo quinto depósito, a quantia total depositada por ele será de

A) R$ 150,00.

B) R$ 250,00.

C) R$ 400,00.

D) R$ 520,00.

E) R$ 600,00.

**13.** (PUC Minas–2007) O tempo destinado à propaganda eleitoral gratuita é dividido entre três coligações partidárias em partes diretamente proporcionais aos termos da progressão aritmética: t, t + 6, $t^2$. Nessas condições, de cada hora de propaganda eleitoral gratuita, a coligação partidária à qual couber a maior parte do tempo **t**, medido em minutos, ficará com

A) 26 min.

B) 28 min.

C) 30 min.

D) 32 min.

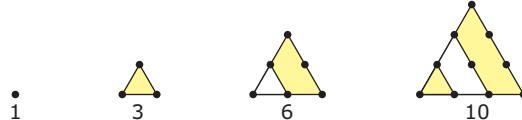
**14.** (UFU-MG–2006) Sabe-se que a soma dos dez primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a 500. A soma do terceiro e do oitavo termos dessa progressão é igual a

A) 50

B) 100

C) 25

D) 125

**15.** (UNIFESP–2006) Se os primeiros quatro termos de uma progressão aritmética são a, b, 5a, d, então o quociente $\frac{d}{b}$ é igual a

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) 2

D) $\frac{7}{3}$

E) 5

**16.** (PUC RS) As quantias, em reais, de cinco pessoas, estão em progressão aritmética. Se a segunda e a quinta possuem, respectivamente, R$ 250,00 e R$ 400,00, a primeira possui

A) R$ 200,00.

B) R$ 180,00.

C) R$ 150,00.

D) R$ 120,00.

E) R$ 100,00.

**17.** (Unicamp-SP) A Anatel determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua frequência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Dessa forma, à emissora cuja frequência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja frequência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

A) Quantas emissoras FM podem funcionar (na mesma região), respeitando-se o intervalo de frequências permitido pela Anatel? Qual o número do canal com maior frequência?

B) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a frequência do canal 285, supondo que todas as frequências possíveis são utilizadas?

**18.** (UFG) Deseja-se pintar com tintas de cores preta e amarela, alternadamente, um disco no qual estão marcados círculos concêntricos, cujos raios estão em P.A. de razão 1 m. Pinta-se no primeiro dia o círculo central do disco, de raio 1 m, usando 0,5 L de tinta preta. Nos dias seguintes, pinta-se a região delimitada pela circunferência seguinte ao círculo pintado no dia anterior. Se a tinta usada, não importando a cor, tem sempre o mesmo rendimento, a quantidade total de tinta amarela gasta até o 21º dia, em litros, será de

A) 100,0

B) 105,0

C) 115,5

D) 199,5

E) 220,5

**19.** (Mackenzie-SP) Na sequência numérica $(4, 7, a_3, a_4, a_5, ...)$, sabe-se que as diferenças $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$, formam uma progressão aritmética de razão 2. Então, $a_{15}$ é igual a

A) 172

B) 186

C) 200

D) 214

E) 228

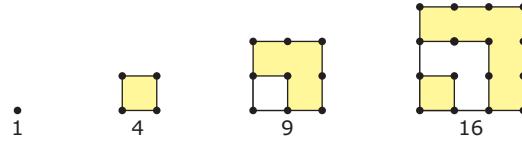
**20.** (UFC–2006) Seja **f** uma função polinomial de primeiro grau, crescente, tal que $f(f(x)) = 9x + 8$, para todo **x** real. Sabendo-se que 2, 5, 8, ..., 44 é uma progressão aritmética de razão 3, o valor numérico de $f(2) + f(5) + f(8) + ... + f(44)$ é

A) 1 020

B) 1 065

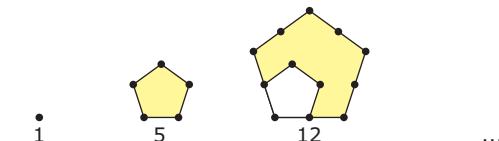
C) 1 110

D) 1 185

E) 1 260

## SEÇÃO ENEM

**01.** Os chamados números figurados são aqueles que podem ser representados geometricamente, em uma determinada configuração, conforme mostrado a seguir:

Números triangulares

1 3 6 10

Números quadrados

1 4 9 16

Considere a sequência de números pentagonais a seguir. Mantido o padrão apresentado, o próximo número da sequência é igual a

Números pentagonais

1 5 12 ...

A) 19

B) 20

C) 22

D) 28

E) 30

**02.** (Enem–2010) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

FUNCIONÁRIO I: aproximadamente 200 estrelas.

FUNCIONÁRIO II: aproximadamente 6 000 estrelas.

FUNCIONÁRIO III: aproximadamente 12 000 estrelas.

FUNCIONÁRIO IV: aproximadamente 22 500 estrelas.

FUNCIONÁRIO V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

A) I

B) II

C) III

D) IV

E) V

**03.** (Enem–2010) Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência, conforme mostrada no esquema a seguir:

```
         1
      1  2  1
   1  2  3  2  1
1  2  3  4  3  2  1
        ...
```

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas. A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

A) 9

B) 45

C) 64

D) 81

E) 285

**04.** (Enem–2009) Uma pessoa decidiu depositar moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos em um cofre durante certo tempo. Todo dia da semana ela depositava uma única moeda, sempre nesta ordem: 1, 5, 10, 25, 50, e, novamente, 1, 5, 10, 25, 50, assim sucessivamente. Se a primeira moeda foi depositada em uma segunda-feira, então essa pessoa conseguiu a quantia exata de R$ 95,05 após depositar a moeda de

A) 1 centavo no 679º dia, que caiu numa segunda-feira.

B) 5 centavos no 186º dia, que caiu numa quinta-feira.

C) 10 centavos no 188º dia, que caiu numa quinta-feira.

D) 25 centavos no 524º dia, que caiu num sábado.

E) 50 centavos no 535º dia, que caiu numa quinta-feira.

# GABARITO

## Fixação

01. C
02. A
03. A
04. B
05. D

## Propostos

01. E
02. E
03. D
04. B
05. D
06. C
07. C
08. D
09. D
10. A
11. B
12. E
13. D
14. B
15. D
16. A
17. A) 101 emissoras
    Canal 300
    B) 104,9 MHz
18. B
19. E
20. B

## Seção Enem

01. C
02. C
03. D
04. D

# MATEMÁTICA

## Progressão geométrica

## INTRODUÇÃO

Chamamos de progressão geométrica (P.G.) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante dada, denominada razão da P.G., e indicada por **q**.

**Exemplos**

**1º)** (3, 6, 12, 24, 48, ...) é uma P.G. **crescente**, com razão q = 2.

**2º)** (5, 5, 5, 5, ...) é uma P.G. **constante**, com razão q = 1.

**3º)** $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\right)$ é uma P.G. **decrescente**, em que $q = \frac{1}{2}$.

**4º)** (3, –6, 12, –24, ...) é uma P.G. **oscilante**, em que q = –2.

## Termo geral da P.G.

Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

Assim, temos:

$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q$$
$$a_4 = a_3.q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1}.q$$

Multiplicando membro a membro essas n – 1 igualdades, temos:

$$(a_2.a_3.a_4. \dots .a_{n-1}).a_n = a_1.(a_2.a_3.a_4. \dots .a_{n-1}).\underbrace{q.q.q \dots .q}_{(n-1)\text{ vezes}}$$

Simplificando os termos da expressão, obtemos:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Essa expressão é a fórmula do Termo geral da P.G.

**Exemplo**

Determinar o sétimo termo da P.G. (1, 3, 9, ...).

***Resolução:***

Sabemos que $a_1 = 1$ e q = 3. Assim, temos:

$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_7 = 1.3^{7-1} \Rightarrow a_7 = 3^6 \Rightarrow a_7 = 729$

## Propriedades da P.G.

**i)** Cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo antecessor e o sucessor. Ou seja, dada uma P.G. (a, b, c, ...), temos:

$$b^2 = ac$$

Por exemplo, observe a P.G. (2, 6, 18, 54, 162, ...).

Temos: $6^2 = 2.18$, $18^2 = 6.54$, etc.

**ii)** O produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Por exemplo, na P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32), temos:

$$\underbrace{1.32}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{2.16}_{\text{equidistantes dos extremos}} = \underbrace{4.8}_{\text{equidistantes dos extremos}} = 32$$

**Notação Especial:**

Representações convenientes de uma P.G.

**i)** P.G. com 3 termos: $\left(\frac{x}{q}; x; xq\right)$, de razão **q**.

**ii)** P.G. com 4 termos: $\left(\frac{x}{q^3}; \frac{x}{q}; xq; xq^3\right)$, de razão $q^2$.

**iii)** P.G. com 5 termos: $\left(\frac{x}{q^2}; \frac{x}{q}; x; xq; xq^2\right)$, de razão **q**.

## Soma dos **n** termos de uma P.G.

Considere a P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$.

Sendo $S_n$ a soma dos seus **n** termos, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \Rightarrow$$
$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (I)$$

Multiplicando os dois membros da expressão (I) pela razão **q**, temos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \quad (II)$$

Fazendo (II) – (I), obtemos:

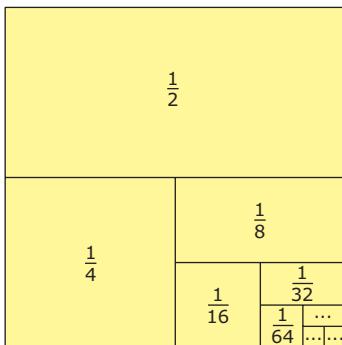
$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$
$$-\ S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$
$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow$$
$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos **n** termos de uma P.G.

**Exemplo**

Calcular a soma dos 5 primeiros termos da P.G. (3, 9, 27, ...).

***Resolução:***

Temos $a_1 = 3$ e $q = 3$. Logo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{3.242}{2} = 363$$

## Soma dos infinitos termos de uma P.G.

Em determinadas situações, podemos observar que a soma dos infinitos termos de uma P.G. pode convergir para um valor finito. Como exemplo, considere um quadrado de área igual a 1. Vamos dividi-lo em retângulos e quadrados menores, indicando a área de cada parte, conforme a figura a seguir:

Quadrado de área 1

Observe que o quadrado pode ser subdividido em infinitas figuras menores. A soma das áreas dessas figuras é dada por: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$

Logo, dizemos que o limite dessa soma, quando o número de parcelas tende ao infinito, é igual a 1, ou seja, a área do quadrado original.

Assim, de maneira geral, a condição para que a soma dos infinitos termos de uma P.G. acabe convergindo para um valor finito é que a razão **q** seja um número entre –1 e 1.

Logo, aplicando a fórmula da soma, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Como **q** é um número entre –1 e 1, à medida que **n** se aproxima do infinito, o valor de $q^n$ fica próximo de zero.

Portanto, à medida que **n** tende ao infinito, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ para } -1 < q < 1$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos infinitos termos de uma P.G.

**Exemplo**

Calcular o valor de $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ .

***Resolução:***

O valor anterior corresponde à soma dos infinitos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

Temos $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$. Assim:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**01.** (Mackenzie-SP) A soma dos termos da progressão $(3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \ldots)$ é

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 4

***Resolução:***

Podemos escrever a P.G. anterior do seguinte modo:

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$. Observe que $a_1 = q = \frac{1}{3}$. Assim, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

# PRODUTO DOS n TERMOS DE UMA P.G.

Consideremos a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$. Denotemos por $P_n$ o produto dos **n** primeiros termos dessa P.G. Assim, temos:

$$P_n = a_1.a_2.a_3. \ldots .a_n \Rightarrow$$

$$P_n = a_1.(a_1.q).(a_1.q^2). \ldots .(a_1.q^{n-1}) \Rightarrow$$

$$P_n = a_1^n.q^{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)}$$

Observe que o expoente de **q** na expressão anterior é igual à soma dos n – 1 termos da P.A. (1, 2, 3, ..., n – 1). Logo, essa soma é dada por:

$$S_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n - 1)}{2} = \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2}$$

Substituindo na expressão do produto dos **n** termos, obtemos:

$$P_n = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**02.** (UFPE) Supondo-se que numa progressão geométrica o 1º termo é 1 e o 6º termo é 32, assinalar a alternativa que corresponde ao produto dos 6 primeiros termos dessa progressão.

A) 4 096
B) 1 024
C) 5 120
D) 32 768
E) 10 000

***Resolução:***

Sabe-se que $a_n = a_1.q^{n-1}$, ou seja:

$a_6 = a_1.q^{6-1} \Rightarrow 32 = 1.q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{32} = 2$

Portanto, o produto dos 6 primeiros termos da P.G. é dado por:

$P_n = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow P_6 = 1^6.2^{\frac{6.5}{2}} = 2^{15} = 32\ 768$

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (PUC Rio–2007) A sequência $10^x$, $10^{x+1}$, $10^{x+2}$, ... representa

A) uma progressão aritmética de razão 10.
B) uma progressão aritmética de razão 1.
C) uma progressão geométrica de razão 10.
D) uma progressão geométrica de razão 1.
E) nem progressão aritmética nem progressão geométrica.

**02.** (UEL-PR–2007) Para testar o efeito da ingestão de uma fruta rica em determinada vitamina, foram dados pedaços dessa fruta a macacos. As doses da fruta são arranjadas em uma sequência geométrica, sendo 2 g e 5 g as duas primeiras doses. Qual a alternativa **CORRETA** para continuar essa sequência?

A) 7,5 g; 10,0 g; 12,5 g ...
B) 125 g; 312 g; 619 g ...
C) 8 g; 11 g; 14 g ...
D) 6,5 g; 8,0 g; 9,5 g ...
E) 12,500 g; 31,250 g; 78,125 g ...

**03.** (UFU-MG) Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ números reais cuja soma é igual a 88. Sabendo-se que $a_1 - 2$, $a_2$, $a_3$ estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão 6, determine o maior desses números.

A) 6
B) 12
C) 72
D) 24
E) 32

**04.** (Unimontes-MG–2006) Considerando uma infinidade de quadrados de lados medindo 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2^3}}$, $\frac{1}{\sqrt{2^4}}$, ..., em cm, é **CORRETO** afirmar que a soma das áreas de todos esses quadrados é, em $cm^2$, igual a

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 4
D) 2

**05.** (UNIFEI-MG–2009) Considere uma progressão geométrica (P.G.) de 8 termos, em que a soma dos termos de ordem par é 510 e a soma dos termos de ordem ímpar é 255. Então, a razão **q** dessa P.G. vale

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 2
D) 3

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (PUC Minas–2006) O valor de **x** na igualdade $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = 12$, na qual o primeiro membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, é igual a

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11

**02.** (UFRGS) Os termos x, x + 9 e x + 45 estão em progressão geométrica, nessa ordem. A razão dessa progressão é

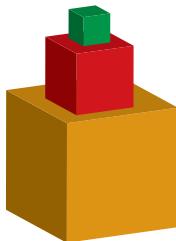
A) 45
B) 9
C) 4
D) 3
E) $\frac{4}{3}$

**03.** (FGV-SP–2010) Um capital de R$ 1 000,00 é aplicado a juro simples, à taxa de 10% ao ano; os montantes, daqui a 1, 2, 3, ..., n anos, formam a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Outro capital de R$ 2 000,00 é aplicado a juro composto, à taxa de 10% ao ano gerando a sequência de montantes $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ daqui a 1, 2, 3, ..., n anos.

As sequências $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ formam, respectivamente,

A) uma progressão aritmética de razão 1,1 e uma progressão geométrica de razão 10%.
B) uma progressão aritmética de razão 100 e uma progressão geométrica de razão 0,1.
C) uma progressão aritmética de razão 10% e uma progressão geométrica de razão 1,10.
D) uma progressão aritmética de razão 1,10 e uma progressão geométrica de razão 1,10.
E) uma progressão aritmética de razão 100 e uma progressão geométrica de razão 1,10.

**04.** (UEL-PR–2007) Um automóvel zero km é comprado por R$ 32 000,00. Ao final de cada ano, seu valor diminui 10% em função da depreciação do bem. O valor **APROXIMADO** do automóvel, após seis anos, é de

A) R$ 15 006,00.
B) R$ 19 006,00.
C) R$ 16 006,00.
D) R$ 12 800,00.
E) R$ 17 006,00.

**05.** (UFJF-MG–2006) Uma progressão aritmética e uma geométrica têm o número 2 como primeiro termo. Seus quintos termos também coincidem e a razão da P.G. é 2. Sendo assim, a razão da P.A. é

A) 8 B) 6 C) $\frac{32}{5}$ D) 4 E) $\frac{15}{2}$

**06.** (FUVEST-SP–2010) Os números $a_1$, $a_2$, $a_3$ formam uma progressão aritmética de razão **r**, de tal modo que $a_1 + 3$, $a_2 - 3$, $a_3 - 3$ estejam em progressão geométrica. Dado ainda que $a_1 > 0$ e $a_2 = 2$, conclui-se que **r** é igual a

A) $3 + \sqrt{3}$
B) $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $3 + \frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $3 - \sqrt{3}$

**07.** (UFU-MG) Cubos são colocados uns sobre os outros, do maior para o menor, para formar uma coluna, como mostra a figura a seguir:

O volume do cubo maior é 1 m³ e o volume de cada um dos cubos seguintes é igual a $\frac{1}{27}$ do volume do cubo sobre o qual está apoiado. Se fosse possível colocar uma infinidade de cubos, a altura da coluna seria igual a

A) $\frac{27}{26}$ m.
B) 2 m.
C) 1,5 m.
D) 4,5 m.

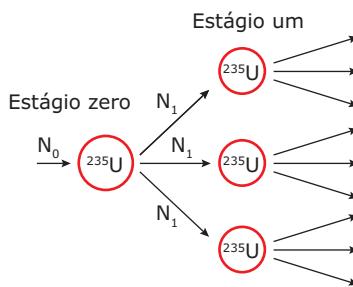
**08.** (UFOP-MG) O primeiro termo de uma progressão geométrica vale $\frac{1}{4}$ e o segundo termo vale 2. O vigésimo termo vale

A) $2^{58}$ B) $2^{55}$ C) $\frac{141}{4}$ D) $\frac{67}{2}$

**09.** (UFU-MG) Considere $a_n$ o termo geral de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 1. Podemos afirmar que a representação gráfica dos pontos $(n, a_n)$ no plano cartesiano, em que $n \in \mathbb{N}$, está contida no gráfico de uma função

A) quadrática.
B) exponencial.
C) linear.
D) logarítmica.

**10.** (PUC Minas–2006) O número de assinantes de uma revista de circulação na grande BH aumentou, nos quatro primeiros meses de 2005, em progressão geométrica, conforme assinalado na tabela a seguir:

| Mês | Janeiro | Fevereiro | Março | Abril |
|---|---|---|---|---|
| Número de assinantes | 5 000 | 5 500 | 6 050 | – |

Com base nessas informações, pode-se afirmar que, de fevereiro para abril, o número de assinantes dessa revista teve um aumento igual a

A) 1 050
B) 1 155
C) 1 510
D) 1 600

**11.** (PUC Minas–2007) Depois de percorrer um comprimento de arco de 12 m, uma criança deixa de empurrar o balanço em que está brincando. Se o atrito diminui a velocidade do balanço de modo que o comprimento de arco percorrido seja sempre igual a 80% do anterior, a distância total percorrida pela criança, em metros, até que o balanço pare completamente, é dada pela expressão D = 12 + 0,80.12 + 0,80.(0,80.12) + ... . Observando-se que o segundo membro dessa igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, pode-se estimar que o valor de **D**, em metros, é igual a

A) 24
B) 36
C) 48
D) 60

**12.** (UEL-PR–2010) Sobre a reação em cadeia citada no texto **X**, considere que a cada processo de fissão de um núcleo de $^{235}U$ sejam liberados três nêutrons. Na figura a seguir está esquematizado o processo de fissão, no qual um nêutron $N_0$ fissiona um núcleo de $^{235}U$, no estágio zero, liberando três nêutrons $N_1$. Estes, por sua vez, fissionarão outros três núcleos de $^{235}U$ no estágio um, e assim por diante.

Continuando essa reação em cadeia, o número de núcleos de $^{235}U$ que serão fissionados no estágio 20 é

A) $\frac{3^{20}-1}{2}$

B) $3^{20}$

C) $3\,\frac{3^{20}-1}{2}$

D) $\frac{3^{20}+1}{2}$

E) $10(3^{20} + 1)$

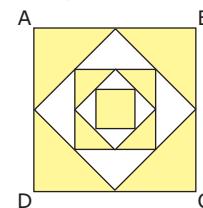
**13.** (UFSM-RS) A sequência de números reais (x, y, z, t) forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 160; a sequência de números reais (x, y, w, u) forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 3. Assim, a soma t + u é

A) 440

B) 340

C) 240

D) 140

E) 40

**14.** (Unifor-CE) O 2º e o 5º termos de um progressão geométrica são, respectivamente, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{48}$. O 6º termo dessa progressão é

A) $\frac{1}{56}$

B) $\frac{1}{72}$

C) $\frac{1}{85}$

D) $\frac{1}{96}$

E) $\frac{1}{144}$

**15.** (UFU-MG) A soma de todos os divisores positivos de $3^{2\,004}$ é igual a

A) $\frac{3^{2\,004}-1}{2}$

B) $3^{2\,004}$

C) $\frac{3^{2\,005}-1}{2}$

D) $3^{2\,005}$

**16.** (FGV-SP–2006) Um atleta corre 1 000 metros numa direção, dá meia-volta e retorna metade do percurso; novamente dá meia-volta e corre metade do último trecho; torna a virar-se e corre metade do trecho anterior, continuando assim indefinidamente.

A) Quanto terá percorrido aproximadamente esse atleta, desde o início, quando completar o percurso da oitava meia-volta?

B) Se continuar a correr dessa maneira, indefinidamente, a que distância do ponto de partida inicial o atleta chegará?

**17.** (UFSM-RS) No piso do *hall* de entrada de um *shopping*, foi desenhado um quadrado $Q_1$ de 10 m de lado, no qual está inscrito um segundo quadrado $Q_2$ obtido da união dos pontos médios dos lados do quadrado anterior, e assim sucessivamente, $Q_3$, $Q_4$, ..., formando uma sequência infinita de quadrados, seguindo a figura. Dessa forma, a soma das áreas dos quadrados é de

A) 25 m².

B) $25\sqrt{2}$ m².

C) 200 m².

D) $50\sqrt{2}$ m².

E) $100\left(2+\sqrt{2}\right)$ m².

**18.** (UFC–2007) Observe a questão a seguir: A sequência $(a_n)$, $n \geq 1$, tem seus termos dados pela fórmula $a_n = \frac{n+1}{2}$. **CALCULE** a soma dos dez primeiros termos da sequência $(b_n)$, $n \geq 1$, em que $b_n = 2^{a_n}$, para $n \geq 1$.

**19.** (FUVEST-SP–2008) Sabe-se sobre a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica $a_1, a_5, a_9, \ldots$ tem razão igual a 9. Nessas condições, o produto $a_2.a_7$ vale

A) $-27\sqrt{3}$

B) $-3\sqrt{3}$

C) $-\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $27\sqrt{3}$

**20.** (UFRGS–2005) Para pagar uma dívida de **x** reais no seu cartão de crédito, uma pessoa, após um mês, passará a fazer pagamentos mensais de 20% sobre o saldo devedor. Antes de cada pagamento, serão lançados juros de 10% sobre o saldo devedor. Efetuados 12 pagamentos, a dívida, em reais, será

A) zero.

B) $\frac{x}{12}$

C) $(0,88)^{12}x$

D) $(0,92)^{12}x$

E) $(1,1)^{12}x$

# SEÇÃO ENEM

**01.** (Enem–2008) *Fractal (do latim* fractus, *fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.*

O Triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero (figura 1).
2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias.
3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2.
4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

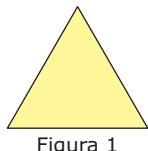



Figura 1

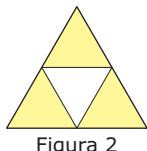



Figura 2

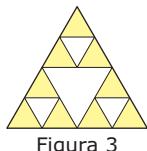
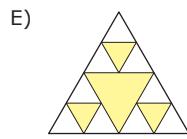
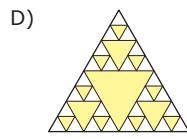
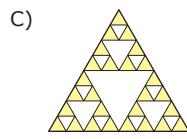
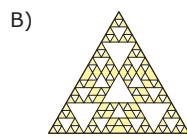
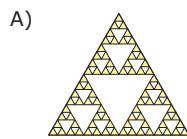



Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada anteriormente é

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

**02.** Nascido em 1845, o matemático russo Georg Cantor teve um papel extremamente importante no desenvolvimento da Matemática Moderna, particularmente na elaboração da Teoria dos Conjuntos. Um outro trabalho de Cantor é o chamado Conjunto de Cantor, que é representado a seguir:

A montagem desse conjunto é feita do seguinte modo:

- Toma-se um segmento de reta (1ª linha);
- Divide-se esse segmento em três partes iguais, suprimindo-se a parte central (2ª linha);
- Repete-se o processo em cada segmento de reta remanescente (3ª linha), e assim por diante.

Repetindo-se esse processo indefinidamente, o número de segmentos de reta presentes na 10ª linha é igual a

A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1 024

# GABARITO

## Fixação

01. C
02. E
03. C
04. D
05. C

## Propostos

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. A | 04. E | 07. C | 10. B | 13. B |
| 02. C | 05. E | 08. B | 11. D | 14. D |
| 03. E | 06. E | 09. B | 12. B | 15. C |

16. A) 1 996,10 metros

    B) $\frac{2\ 000}{3}$ metros

17. C

18. $62(\sqrt{2} + 1)$

19. A

20. C

## Seção Enem

01. C
02. D

# MATEMÁTICA

## Matrizes

MÓDULO 21 FRENTE E

## INTRODUÇÃO

Em várias situações envolvendo diversas áreas da ciência, as informações são apresentadas na forma de uma tabela retangular, formada por linhas e colunas. Tal formatação justifica-se pela notável organização propiciada por essa configuração, aliada à facilidade de se efetuar vários cálculos simultâneos com os dados nesse formato. Essa tabela retangular é chamada de matriz.

A teoria das matrizes encontra aplicação em diversas áreas, tais como Computação, Engenharia, Física, Economia, Administração, entre outras. Na Matemática, as matrizes integram a teoria da chamada Álgebra Linear, da qual fazem parte também os determinantes e os sistemas lineares.

## DEFINIÇÃO DE MATRIZ

Vamos considerar a tabela a seguir, que indica o faturamento de três filiais de uma empresa, nos meses de janeiro e fevereiro de um certo ano:

| FATURAMENTO | | |
|---|---|---|
| | Janeiro | Fevereiro |
| Filial **A** | 1 850 000 | 2 014 000 |
| Filial **B** | 765 000 | 1 023 000 |
| Filial **C** | 2 340 000 | 1 890 000 |

Essa tabela é um exemplo de matriz, e pode ser representada nos seguintes formatos:

Colchetes

$$\begin{bmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{bmatrix}$$

Barras Duplas

$$\begin{Vmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{Vmatrix}$$

Parênteses

$$\begin{pmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{pmatrix}$$

OBSERVAÇÃO

Cada matriz anterior é formada por 3 linhas e 2 colunas. Por isso, dizemos que elas são de ordem 3x2.

De maneira geral, podemos definir uma matriz como uma tabela numérica na qual os elementos estão dispostos em linhas e colunas.

## REPRESENTAÇÃO GENÉRICA

Consideremos a matriz genérica $A_{mxn}$, ou seja, com **m** linhas e **n** colunas. Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento da matriz **A** é indicado por $a_{ij}$. O índice **i** indica a linha, e o índice **j**, a coluna a que os elementos pertencem. As linhas são numeradas da esquerda para a direita, enquanto as colunas são numeradas de cima para baixo. Por exemplo, $a_{23}$ representa o elemento da linha 2 e coluna 3.

Considerando a matriz $\begin{bmatrix} 1\,850\,000 & 2\,014\,000 \\ 765\,000 & 1\,023\,000 \\ 2\,340\,000 & 1\,890\,000 \end{bmatrix}$, temos:

$a_{11} = 1\,850\,000$ $a_{12} = 2\,014\,000$

$a_{21} = 765\,000$ $a_{22} = 1\,023\,000$

$a_{31} = 2\,340\,000$ $a_{32} = 1\,890\,000$

OBSERVAÇÃO

Uma matriz pode estar representada de forma abreviada, por meio de uma lei de formação.

**Exemplo**

Escrever na forma de tabela a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, tal que $a_{ij} = 4i + 3j$.

***Resolução:***

Nesse caso, a matriz é dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Vamos calcular o valor de cada um dos termos da matriz, utilizando a lei de formação dada:

$a_{11} = 4.1 + 3.1 = 7$ $a_{12} = 4.1 + 3.2 = 10$ $a_{13} = 4.1 + 3.3 = 13$

$a_{21} = 4.2 + 3.1 = 11$ $a_{22} = 4.2 + 3.2 = 14$ $a_{23} = 4.2 + 3.3 = 17$

$a_{31} = 4.3 + 3.1 = 15$ $a_{32} = 4.3 + 3.2 = 18$ $a_{33} = 4.3 + 3.3 = 21$

Portanto, em forma de tabela temos $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 11 & 14 & 17 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$.

# MATRIZES ESPECIAIS

## Matriz Linha

É toda matriz que possui uma única linha (ordem 1xn).

**Exemplo**

$A = [3 \quad 4 \quad -1]$

## Matriz Coluna

É toda matriz que possui uma única coluna (ordem mx1).

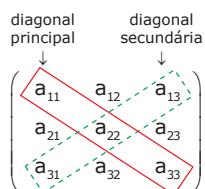
**Exemplo**

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ \pi \\ 2 \\ -100 \end{bmatrix}$$

## Matriz Nula

É toda matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

**Exemplo**

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula 3x3.

## Matriz Quadrada

É toda matriz na qual o número de linhas é igual ao de colunas. A matriz quadrada do tipo nxn pode ser chamada de matriz de ordem **n**.

**Exemplo**

Tomemos uma matriz genérica 3x3. Assim, temos:

Observe que a diagonal principal é formada pelos elementos i = j. Já a diagonal secundária é formada pelos elementos i + j = n + 1.

## Matriz Diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são nulos.

**Exemplo**

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

## Matriz Identidade (ou Matriz Unidade)

É toda matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são nulos, e os elementos da diagonal principal são iguais à unidade. Representamos a matriz unidade de ordem **n** por $I_n$.

**Exemplos**

**1º)** $I_1 = [\ 1\ ]$ (matriz identidade de ordem 1)

**2º)** $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matriz identidade de ordem 2)

**3º)** $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matriz identidade de ordem 3)

e assim por diante.

## Matriz Oposta

Dada a matriz **A**, sua oposta –A é obtida trocando-se os sinais dos elementos da **A**.

**Exemplo**

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$. Então, $-A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$.

## Matriz Transposta

Dada uma matriz **A** do tipo mxn, chama-se transposta de **A**, e indica-se por $A^t$, à matriz do tipo nxm, que possui as linhas ordenadamente iguais às colunas de **A** e as colunas ordenadamente iguais às linhas de **A**.

**Exemplo**

Seja $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 13 \\ 21 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $A^t = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 0 & -4 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$.

### Propriedades da Transposta

Sendo **A** e **B** matrizes e **α** um número real, e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

**i)** $(A + B)^t = A^t + B^t$

**ii)** $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$

**iii)** $(A^t)^t = A$

**iv)** $(A.B)^t = B^t.A^t$

OBSERVAÇÕES

Uma matriz quadrada **A** é dita **simétrica** se $A = A^t$.

Uma matriz quadrada **A** é dita **antissimétrica** se $A = -A^t$.

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**01.** (UFRGS) Uma matriz **A** é dita simétrica quando $A = A^t$. Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{bmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de x + y + z?

***Resolução:***

A matriz transposta da matriz dada é igual a $\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 4 & z \\ y & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Igualando as matrizes, temos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 4 & z \\ y & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Logo, x = 2, y = 3 e z = 5.

Portanto, x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10.

# OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

## Igualdade de matrizes

Sejam duas matrizes **A** e **B** de mesma ordem mxn. As matrizes **A** e **B** são iguais se, e somente se, todos os elementos correspondentes de **A** e **B** são iguais.

**Exemplo**

Determinar os valores de **x**, **y** e **z** na igualdade a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 6 & 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & z \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$

***Resolução:***

Igualando-se os termos correspondentes, obtemos:

$$\begin{cases} 2x = 8 \\ z = 4 \\ 5y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

## Adição de matrizes

Sejam **A** e **B** duas matrizes de mesma ordem mxn. Chamamos de soma das matrizes **A** e **B**, e escrevemos A + B, a uma matriz **C**, também do tipo mxn, tal que seus elementos sejam obtidos somando-se os elementos correspondentes das matrizes **A** e **B**.

**Exemplo**

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 21 & 0 & -11 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & -13 & 55 & 7 \\ 6 & 1 & -3 & 18 \end{bmatrix}$, determinar a matriz A + B.

***Resolução:***

$$A + B = \begin{bmatrix} 21+8 & 0-13 & -11+55 & 6+7 \\ 8+6 & 1+1 & 1-3 & 5+18 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 29 & -13 & 44 & 13 \\ 14 & 2 & -2 & 23 \end{bmatrix}$$

## Propriedades da adição de matrizes

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes de mesma ordem e **O** a matriz nula, e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

| | |
|---|---|
| Comutativa | A + B = B + A |
| Associativa | (A + B) + C = A + (B + C) |
| Elemento neutro | A + O = O + A = A |
| Elemento oposto | A + (–A) = (–A) + A = O |

## Multiplicação de uma matriz por um número

Seja **k** um número real e **A** uma matriz do tipo mxn. Definimos o produto de **k** por **A** e escrevemos k.A uma matriz **B**, também do tipo mxn, tal que seus elementos são obtidos multiplicando-se todos os elementos da matriz **A** pelo número **k**.

**Exemplo**

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, obter a matriz 5.A.

***Resolução:***

$$5.A = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.11 \\ 5.0 & 5.3 \\ 5.4 & 5.4 \\ 5.1 & 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 55 \\ 0 & 15 \\ 20 & 20 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

## Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{mxn}$ e $B_{nxp}$. Chama-se produto das matrizes **A** e **B**, nessa ordem, a matriz $C_{mxp}$, tal que cada elemento $C_{ij}$ da matriz **C** é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha **i** de **A** pelos da coluna **j** de **B**.

OBSERVAÇÕES

**i)** Somente é possível a multiplicação de duas matrizes, se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, isto é:

$$A_{mxn} \; . \; B_{nxp}$$
$$\exists \, A.B$$

**ii)** Na matriz produto $C_{mxp}$, o número de linhas é igual ao número de linhas da primeira matriz, e o número de colunas é igual ao número de colunas da segunda matriz.

**Exemplo**

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observamos que o produto A.B existe, pois o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**.

Podemos utilizar o seguinte algoritmo:

Escrevemos, inicialmente, a matriz **A** e, em seguida, escrevemos a matriz **B**. O produto A.B é obtido do seguinte modo:

Multiplicamos cada elemento de uma determinada linha de **A** pelo elemento correspondente de uma coluna de **B**. Em seguida, somamos esses produtos, obtendo o elemento correspondente da matriz produto A.B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3+3.2 & 1.4+3.(-1) & 1.1+3.0 \\ 0.3+4.2 & 0.4+4.(-1) & 0.1+4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

## Propriedades da multiplicação de matrizes

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes e $\alpha$ um número real e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

| | |
|---|---|
| **i)** Associativa | A.(B.C) = (A.B).C |
| **ii)** Distributiva à esquerda | A.(B + C) = A.B + A.C |
| **iii)** Distributiva à direita | (A + B).C = A.C + B.C |
| | $A_{mxn}.I_n = A_{mxn}$ |
| | $I_m.A_{mxn} = A_{mxn}$ |
| | $(\alpha.A).B = A.(\alpha.B) = \alpha.(A.B)$ |

OBSERVAÇÃO

Dadas as matrizes **A** e **B**, e supondo que o produto A.B exista, há três possibilidades para o produto B.A:

1ª possibilidade: B.A pode não existir.

2ª possibilidade: B.A pode existir e ser diferente de A.B.

3ª possibilidade: B.A pode existir e ser igual a A.B.

No terceiro caso, dizemos que as matrizes **A** e **B** comutam na multiplicação.

**Exemplo**

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determinar (caso exista)

A) $A^2$.

***Resolução:***

Temos que $A^2$ = A.A. Efetuando o produto, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+0.1 & 2.0+0.3 \\ 1.2+3.1 & 1.0+3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

B) A.B.

***Resolução:***

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+0.2 & 2.2+0.0 \\ 1.1+3.2 & 1.2+3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

C) B.A.

***Resolução:***

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.0+2.3 \\ 2.2+0.1 & 2.0+0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO

Embora existam A.B e B.A, as matrizes obtidas não são iguais. Portanto, dizemos que **A** e **B** não comutam na multiplicação.

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**02.** (Unisa-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, então, calculando-se $(A + B)^2$, obtém-se

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 121 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 60 \\ 1 & 121 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

***Resolução:***

Inicialmente, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 2+3 & 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Logo, $(A + B)^2$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.5 & 1.0+0.11 \\ 5.1+11.5 & 5.0+11.11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$$

# MATRIZES INVERSAS

## Introdução

O conceito de matriz inversa nasceu da necessidade de se resolver equações matriciais da forma A.X = B. Como não existia um equivalente matricial da divisão, os matemáticos desenvolveram um conjunto de técnicas para efetuar uma operação chamada inversão de matrizes, de maneira similar ao cálculo do inverso multiplicativo de um número real.

## Definição

Dada a matriz $A_{nxn}$, chamamos de sua inversa a matriz $A^{-1}_{nxn}$, tal que:

$$A_{nxn}.A^{-1}_{nxn} = A^{-1}_{nxn}.A_{nxn} = I_{nxn}$$

Em que $I_{nxn}$ é a matriz identidade de ordem **n**.

OBSERVAÇÃO

Convém ressaltar que uma matriz **A** pode não possuir inversa. Caso possua, **A** é dita inversível, e sua inversa é única. Caso contrário, a matriz **A** é chamada singular.

## Obtenção da matriz inversa

**Exemplo**

Calcular a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

***Resolução:***

Seja a matriz inversa dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$.

Assim, temos:

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x + y & 2z + t \\ 3y & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando termo a termo, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y = 0 \\ 2z + t = 0 \\ 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{6} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

## Unicidade da matriz inversa

Se a matriz **A** é inversível, então a sua inversa é única.

**Demonstração:**

Suponhamos, por absurdo, que exista uma outra matriz **B**, tal que A.B = B.A = I.

Sabemos que $A.A^{-1} = I$.

Multiplicando-se, à esquerda, ambos os membros da equação anterior, temos:

$B.(A.A^{-1}) = B.I \Rightarrow (B.A).A^{-1} = B.I$

Mas, B.A = I.

Logo, $I.A^{-1} = B.I \Rightarrow A^{-1} = B$.

Portanto, a matriz inversa de **A** é única.

## Propriedades da matriz inversa

Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem. Assim, temos:

| | |
|---|---|
| **i)** | $(A^{-1})^{-1} = A$ |
| **ii)** | $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ |
| **iii)** | $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ |

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**03.** Calcular a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

***Resolução:***

Seja a matriz inversa dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$. Assim, temos:

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x + y & 2z + t \\ 3y & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando termo a termo, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \text{e} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2z + t = 0 \\ 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{6} \\ \text{e} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (PUC Minas) O valor de **x** para que o produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz simétrica é

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

**02.** (UFOP-MG) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, sabe-se que $A.B^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

O valor de a + b é

A) 3
B) 7
C) 10
D) 11

**03.** (FGV-SP–2009) As matrizes **A**, **B**, e **C** são quadradas de ordem 3, e **O** é a matriz nula, também de ordem 3. Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) (A – B).C = A.C – B.C

B) A.C = C.A

C) (A + B).(A – B) = $A^2$ – $B^2$

D) $(B + C)^2$ = $B^2$ + 2.B.C + $C^2$

E) Se A.B = O, então, A = O ou B = O.

**04.** (UFU-MG) Seja **A** uma matriz de terceira ordem com elementos reais. Sabendo-se que $A.\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}$, conclui-se que –1, 4 e 2 são os elementos da

A) diagonal da transposta de **A**.

B) primeira coluna da transposta de **A**.

C) primeira linha da transposta de **A**.

D) última linha da transposta de **A**.

**05.** (UFRGS) A = $(a_{ij})$ é uma matriz de ordem 2x2 com $a_{ij} = 2^{-i}$ se i = j e $a_{ij}$ = 0 se i ≠ j. A inversa de **A** é

A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2^{12}\end{bmatrix}$

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (UFPR) Dada a equação matricial

$$\begin{pmatrix}x & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ y & z\end{pmatrix}$$

o valor do produto xyz é

A) 80

B) 150

C) 120

D) 60

E) 32

**02.** (UFTM–2010) A soma dos elementos da 3ª linha da matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$ definida por $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ é igual a

A) 9

B) 8

C) 7

D) 5

E) 4

**03.** (UFPA) Sejam $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$. Calculando A.B, obtemos

A) $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

**04.** (UFU-MG) Se **A**, **B** e **C** são matrizes 4x3, 3x4 e 4x2, respectivamente, então a transposta do produto A.B.C é uma matriz do tipo

A) 4x2

B) 2x4

C) 3x2

D) 1x3

E) Nesta ordem o produto não é definido.

**05.** (UA-AM) Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -4\\ 3 & -6 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-8 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 10\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}6 & -8 & 7\\ -4 & -2 & 6\end{pmatrix}$, a matriz $-2.A + \frac{1}{2}.B - \frac{3}{2}.C$ é igual a

A) $\begin{pmatrix}-11 & 13 & -3\\ 0 & 17 & -6\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}-17 & 18 & 19\\ 0 & 17 & -12\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}-11 & 13 & 19\\ -12 & 11 & -6\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}-17 & 18 & -3\\ -12 & 11 & -6\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}7 & 11 & 6\\ -18 & 0 & -12\end{pmatrix}$

**06.** (PUC RS) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, na qual $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i = j \\ 1 \text{ se } i > j \\ -1 \text{ se } i < j \end{cases}$. Então, $A - A^t + I_3$ resulta na matriz

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**07.** (UFSJ-MG) Sendo **A** a matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A.A. \ldots .A}_{n \text{ vezes}}$. No caso de **A** ser a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, é **CORRETO** afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{39} + A^{40}$ é igual à matriz

A) $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 40 & 0 \end{bmatrix}$

**08.** (Fatec-SP) Sabe-se que as ordens das matrizes **A**, **B** e **C** são, respectivamente, 3xr, 3xs e 2xt. Se a matriz (A – B).C é de ordem 3x4, então r + s + t é igual a

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14

**09.** (UNIRIO-RJ) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = [2 \ \ 1 \ \ 3]$. A adição da transposta de **A** com o produto de **B** por **C** é

A) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de **B** por **C**.

B) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes.

C) impossível de se efetuar, pois não existe a soma da transposta de **A** com o produto de **B** por **C**.

D) possível de se efetuar, e seu resultado é do tipo 2x3.

E) possível de se efetuar, e seu resultado é do tipo 3x2.

**10.** (EFOA-MG–2006) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. O conjunto solução da equação (A – 4.I).X = 0 é formado por pontos de uma reta de coeficiente angular igual a

A) $\frac{1}{2}$

B) $-\frac{3}{2}$

C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{2}$

E) $\frac{3}{2}$

**11.** (Unimontes-MG) Um construtor tem contratos para construir 2 estilos de casa: moderno e colonial. A quantidade de material empregado em cada tipo de casa é dada pela matriz:

| | Ferro | Madeira | Tijolo |
|---|---|---|---|
| Moderno | 6 | 20 | 18 |
| Colonial | 5 | 22 | 12 |

Suponha que o construtor vá construir 2 casas do tipo moderno e 3 do tipo colonial. Se os preços por unidade de ferro, madeira e tijolo são, respectivamente, R$15,00, R$8,00 e R$10,00, então o custo total do material empregado é igual a

A) R$ 1 923,00.

B) R$ 1 602,00.

C) R$ 1 973,00.

D) R$ 1 932,00.

MATEMÁTICA

**12.** (FGV-SP) A matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é inversa de $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix}$.

Nessas condições, podemos afirmar que a soma x + y vale

A) −1
B) −2
C) −3
D) −4
E) −5

**13.** (UFRRJ) Dada a matriz **A** a seguir, denotamos por $A^{-1}$ a matriz inversa de **A**. Então, $A + A^{-1}$ é igual a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

B) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

C) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

**14.** (PUC Minas) Sejam as matrizes

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & p \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, em que **p** e **q** são números reais e **B** é a matriz inversa de **A**. Então, o valor de q − 12p é

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

**15.** (EFOA-MG) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$, em que **x** e **y** são números reais e **M** é a matriz inversa de **A**. Então, o produto yx é

A) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{1}{4}$

**16.** (PUC-SP) Sendo **A** e **B** matrizes inversíveis de mesma ordem e **X** uma matriz tal que $(X.A)^t = B$, então

A) $X = A^{-1}.B^t$
B) $X = B^t.A^{-1}$
C) $X = (B.A)^t$
D) $X = (A.B)^t$
E) N.d.a.

**17.** (FGV-SP) No que se refere à solução da equação A.X = B em que **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem 3, pode-se dizer que

A) a equação pode não ter solução.
B) a equação nunca tem solução.
C) a equação tem sempre uma solução que é $X = \frac{B}{A}$.
D) a equação tem sempre uma solução que é $X = B.A^{-1}$.
E) a equação tem sempre uma solução que é $X = A^{-1}.B$.

**18.** (UFV-MG) Considerando a matriz $A_{3x3}$, cujo termo geral é dado por $a_{xy} = (-1)^{x+y}$, é **CORRETO** afirmar que

A) $A = -A^t$
B) **A** é inversível.
C) $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$
D) $a_{xy} = \cos [(x + y)\pi]$
E) $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0$

# GABARITO

## Fixação

01. C
02. D
03. A
04. C
05. C

## Propostos

01. C
02. A
03. A
04. B
05. A
06. C
07. A
08. B
09. D
10. E
11. C
12. C
13. C
14. D
15. A
16. B
17. A
18. D

# MATEMÁTICA

MÓDULO 22

FRENTE E

## Determinantes

### INTRODUÇÃO

Determinantes são números associados a matrizes quadradas. Tais números eram utilizados, por volta do século XVII, na resolução de sistemas lineares. Os determinantes são obtidos por meio de técnicas específicas de cálculo, que serão vistas a seguir.

### REPRESENTAÇÃO

Considere, como exemplo, a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Seu determinante é representado de dois modos:

### DETERMINANTE DA MATRIZ 1X1

Dada a matriz $A = (a_{11})_{1x1}$, o seu determinante é igual ao seu único elemento.

**Exemplo**

$A = [\ 5\ ] \Rightarrow \det A = 5$

### DETERMINANTE DA MATRIZ 2X2

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

**Exemplo**

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\det A = 4.6 - 2.1 = 24 - 2 = 22$

### DETERMINANTE DA MATRIZ 3X3

O determinante da matriz de ordem 3 é calculado pela Regra de Sarrus, que é descrita a seguir:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

**i)** Escrevem-se os elementos da matriz repetindo-se ordenadamente as duas primeiras colunas:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$

**ii)** Acompanhando os traços em diagonal, multiplicamos os elementos entre si, associando-lhes o sinal indicado. Assim:

$\det A = 4.0.3 + 3.4.2 + 2.5.1 - 2.0.2 - 1.4.4 - 3.5.3 \Rightarrow$

$\det A = 0 + 24 + 10 - 0 - 16 - 45 \Rightarrow \det A = -27$

### DETERMINANTE DE ORDEM MAIOR OU IGUAL A 4

Antes de apresentarmos o teorema que nos permitirá o cálculo de determinantes de ordem maior que 3, apresentaremos, inicialmente, alguns conceitos.

#### Menor Complementar ($D_{ij}$)

Seja **A** uma matriz de ordem **n**, $n > 1$, e $a_{ij}$ um elemento dessa matriz. Se eliminarmos a linha **i** e a coluna **j**, isto é, a linha e a coluna do elemento $a_{ij}$, obteremos uma matriz de ordem $n - 1$, cujo determinante será chamado de menor complementar do elemento $a_{ij}$, e indicado por $D_{ij}$.

**Exemplo**

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$. Encontrar $D_{23}$.

***Resolução:***

Identificamos o elemento que se encontra na linha 2 e na coluna 3 e eliminamos a linha 2 e a coluna 3. Veja:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & \boxed{0} \\ \boxed{5 \quad 9} & \boxed{7} \\ 2 & 8 & \boxed{3} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Logo: $D_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8.4 - 2.7 = 18$

## Cofator ou complemento algébrico ($A_{ij}$)

O cofator ou complemento algébrico de um elemento $a_{ij}$, numa matriz **A** de ordem **n**, n > 1, é definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

**Exemplo**

Calcular o cofator $A_{23}$ na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

***Resolução:***

$$A_{23} = (-1)^{2+3}.D_{23} = (-1).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1).(1.5 - 4.0) = (-1).5 = -5$$

## Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz **A**, de ordem **n**, n > 1, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer com seus respectivos cofatores.

OBSERVAÇÃO

O Teorema de Laplace pode ser aplicado para o cálculo de determinantes de ordem maior ou igual a 2. Entretanto, para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2 e 3, existem regras práticas mais adequadas. Portanto, o Teorema de Laplace é mais indicado para o cálculo do determinante de matrizes de ordem maior ou igual a 4.

Como sugestão, para usar o Teorema de Laplace, deve-se tomar a linha ou a coluna com o maior número de zeros.

**Exemplo**

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

***Resolução:***

Inicialmente, vamos escolher a primeira linha como referência. Assim, temos:

$\det(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + a_{14}.A_{14} =$

$1.(-1)^{1+1}.D_{11} + 0.(-1)^{1+2}.D_{12} + 2.(-1)^{1+3}.D_{13} + 0.(-1)^{1+4}.D_{14} \Rightarrow$

$$\det(A) = D_{11} + 2D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$[0 + 3 + 6 - (0 + 6 + 2)] + 2.[24 - 1 + 6 - (-3 + 4 + 12)] \Rightarrow$

$\det(A) = 1 + 2.16 = 1 + 32 = 33$

Portanto, det (A) = 33.

# PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

**i)** O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante da sua transposta.

$$\det A = \det A^t$$

**ii)** Se um determinante possuir uma linha ou coluna nula, o determinante é nulo.

**Exemplo**

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 34 & 1 & -29 \\ 65 & 100 & 180 & 23 \end{vmatrix} = 0$$

pois a segunda linha é nula.

**iii)** Se um determinante possuir duas filas paralelas iguais ou proporcionais, o determinante é nulo.

**Exemplo**

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 18 & 3 & 54 \\ -1 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

pois a terceira coluna é proporcional à primeira coluna.

**iv)** Sejam **k** um número real e **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, tais que:

$$A = \begin{bmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & \cdots & k.a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que **k** é um fator comum aos elementos da primeira linha. Nesse caso, podemos "colocar o fator **k** em evidência" ao calcularmos o determinante.

$$\det(A) = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Convém ressaltar que a propriedade também seria válida se **k** fosse um fator comum a uma coluna do determinante.

De maneira geral, se **k** é um fator comum a todas as **n** linhas de **A**, temos:

$$\det(k.A) = k^n.\det(A)$$

**Exemplo**

Seja uma matriz $A_{3x3}$, tal que det (A) = 4. Calcular det (2A) + det (3A) – 2.det (A).

***Resolução:***

det (2A) + det (3A) – 2.det (A) =

$2^3$.det (A) + $3^3$.det (A) – 2.det (A) =

8.det (A) + 27.det (A) – 2.det (A) =

33.det (A) = 33.4 = 132

**v)** Se os elementos situados abaixo ou acima da diagonal principal forem nulos, o determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

**Exemplo**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 14 & 65 \\ 0 & 2 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1.2.5.7 = 70$$

Consequência: Seja $I_n$ uma matriz identidade de ordem **n**. Então:

$$\det(I_n) = 1$$

**vi)** **Teorema de Binet:** Se **A** e **B** são matrizes quadradas de mesma ordem **n**, então o determinante do produto de **A** por **B** é igual ao produto dos determinantes de **A** e **B**.

$$\det(A.B) = \det A.\det B$$

**vii)** Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), o determinante muda de sinal.

**Exemplo**

Sabe-se que $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10.$

Calcular o valor de $\det(B) = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$

***Resolução:***

Observe que det (B) é obtido a partir da troca da primeira pela segunda linha em det (A). Então, det (B) = –10.

**viii)** **Combinação linear de filas paralelas:** Seja uma matriz quadrada **A** de ordem **n**. Tomemos um número **k** de filas (linhas ou colunas) indicadas por $F_1, F_2, ..., F_k$. Vamos multiplicar cada uma dessas filas pelos números $c_1, c_2, ..., c_k$. Se, em seguida, efetuarmos uma soma envolvendo os elementos dessas novas filas, o conjunto dos resultados obtidos é chamado de combinação linear das **k** filas.

**Exemplo**

Vamos construir uma combinação linear das linhas 2 e 3 da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

***Resolução:***

Vamos multiplicar a linha 2 por 4 e a linha 3 por 5, por exemplo. Em seguida, somaremos os elementos correspondentes.

Multiplicação da linha 2 por 4:

$\{4.5 \quad 4.4 \quad 4.2\} \Rightarrow \{20 \quad 16 \quad 8\}$ (I)

Multiplicação da linha 3 por 5:

$\{5.1 \quad 5.1 \quad 5.2\} \Rightarrow \{5 \quad 5 \quad 10\}$ (II)

Somando (I) e (II), obtemos o conjunto

{25, 21, 18}, que é uma combinação linear das linhas 2 e 3.

**Teorema:**

Se uma matriz quadrada de ordem **n** possui uma das filas igual a uma combinação linear de outras filas, o seu determinante é nulo.

No exemplo anterior, vamos substituir a primeira linha pela combinação linear obtida. Assim, temos:

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 21 & 18 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 25 & 21 & 18 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 200 + 42 + 90 - 72 - 210 - 50 \Rightarrow$$

$$\det(A') = 332 - 332 = 0$$

**ix)** **Teorema de Jacobi:** Adicionando-se a uma fila de uma matriz **A** uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz A’, tal que det (A) = det (A’).

O Teorema de Jacobi é muito útil quando utilizado em conjunto com o Teorema de Laplace.

**Exemplo**

Calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

***Resolução:***

Pelo Teorema de Jacobi, vamos efetuar as seguintes operações:

**i)** Multiplicar a primeira linha por −2 e somar com a segunda linha.

**ii)** Somar a primeira linha com a terceira linha.

**iii)** Multiplicar a primeira linha por −3 e somar com a quarta linha.

O determinante se torna igual a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Aplicando o Teorema de Laplace, usando como referência a primeira coluna, temos:

$$a_{11}.A_{11} = 1.(-1)^{1+1}.D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$a_{11}.A_{11} = (0 - 8 + 6) - (-8 + 0 + 3) = -2 + 5 = 3$$

# REGRA DE CHIÓ

Trata-se de uma regra adequada para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas nas quais $a_{11} = 1$. Se isso for verificado, procedemos do seguinte modo:

**i)** Eliminamos a linha 1 e a coluna 1.

**ii)** De cada elemento restante na matriz, subtraímos o produto dos elementos "perpendiculares" aos elementos considerados pertencentes à linha e à coluna eliminadas.

**iii)** Com os resultados obtidos, construímos uma matriz de ordem n − 1. O determinante dessa nova matriz é igual ao determinante da matriz original.

**Exemplo**

Calcular o determinante a seguir, pela Regra de Chió.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

***Resolução:***

Observe que $a_{11} = 1$, ou seja, podemos aplicar a Regra de Chió. A nova matriz é dada por:

$$\begin{bmatrix} 6 - 4.2 & 5 - 4.0 \\ 1 - 0.2 & 3 - 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cujo determinante é igual a (−2).3 − 1.5 = −6 − 5 = − 11 .

Logo, det (A) = −11.

# MATRIZ DE VANDERMONDE

É toda matriz quadrada com as seguintes características:

**i)** Os elementos da primeira linha são todos iguais a 1.

**ii)** As colunas são formadas por potências de mesma base.

Genericamente, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

## Propriedade

O determinante de Vandermonde é dado pelo produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos da segunda linha, de modo que, em cada diferença, o índice do primeiro termo (minuendo) seja maior do que o índice do segundo termo (subtraendo).

**Exemplo**

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 & 16 \\ 8 & 27 & 1 & 64 \end{bmatrix}$.

***Resolução:***

det (A) = (3 − 2).(1 − 2).(1 − 3).(4 − 2).(4 − 3).(4 − 1) ⇒

det (A) = 1.(−1).(−2).2.1.3 ⇒

det (A) = 12

# EXISTÊNCIA DA MATRIZ INVERSA

Uma matriz **A**, quadrada, é inversível se, e somente se, det A ≠ 0.

**Demonstração:**

Sabemos que:

$A.A^{-1} = I$

Então, $\det(A.A^{-1}) = \det(I)$, mas $\det(I) = 1$.

Aplicando o Teorema de Binet, temos:

$\det A.\det A^{-1} = 1$

Logo, temos:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

## EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UNITAU-SP) Sendo $B = (b_{ij})_{2x2}$, em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ -2ij, \text{ se } i < j \\ 3j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

Calculando o det B, obtemos

A) 13
B) –25
C) 25
D) 20
E) –10

**02.** (UFLA-MG–2009) Sejam **a** e **b** números positivos. Se o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{a} \\ \sqrt{b} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, então o determinante da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix}$ é

A) $\frac{25}{2}$

B) $\frac{25}{4}$

C) 25

D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

**03.** (PUC Minas) **M** é uma matriz quadrada de ordem 3, e seu determinante é det (M) = 2. O valor da expressão det (M) + det (2M) + det (3M) é

A) 12
B) 15
C) 36
D) 54
E) 72

**04.** (UFU-MG) O determinante a seguir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 8 & \log 80 & \log 800 & \log 8\,000 \\ (\log 8)^2 & (\log 80)^2 & (\log 800)^2 & (\log 8\,000)^2 \\ (\log 8)^3 & (\log 80)^3 & (\log 800)^3 & (\log 8\,000)^3 \end{vmatrix}$$ vale

A) log (8.80.800.8 000)
B) 12
C) $\log 8^{24}$
D) log 8 + log 80 + log 800 + log 8 000
E) 24

**05.** (FUVEST-SP) O determinante da inversa da matriz a seguir é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A) $-\frac{52}{5}$ B) $-\frac{48}{5}$ C) $-\frac{5}{48}$ D) $\frac{5}{52}$ E) $\frac{5}{48}$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (UFRGS) O determinante da matriz mostrada na figura a seguir é nulo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{bmatrix}$$

A) para quaisquer valores de **a** e **b**.
B) apenas se a = 0.
C) apenas se b = 0.
D) somente se a = b.
E) somente quando 1 + 2a + (b + 3) = 0.

**02.** (VUNESP) Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$ definida por $a_{ij} = -1 + 2i + j$, para $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$.

O determinante de **A** é

A) 22 B) 11 C) 4 D) –2 E) –4

**03.** (FGV-SP) O determinante de $(A^t.B)$, sendo $A^t$ = matriz transposta de **A**,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$ é

A) –65 B) 55 C) 202 D) –120 E) N.d.a.

**04.** (Mackenzie-SP) Em $\mathbb{R}$, a solução da equação

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$ é

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3 E) 2

**05.** (FGV-SP) Considere a equação det (A – x.I) = 0 em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A soma das raízes dessa equação vale

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

**06.** (PUC-Campinas-SP) O conjunto solução da inequação $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$ é dado por

A) ]–2, 1[

B) ]–2, –1[ ∪ ]1, 2[

C) ]–1, 0[ ∪ ]1, 2[

D) ]0, 2[

E) N.d.a.

**07.** (UFG) Qual o valor de um determinante de quarta ordem, sabendo-se que multiplicando duas de suas linhas por 3 e dividindo suas colunas por 2 obtém-se o número 27?

A) $\frac{243}{16}$  B) 18  C) 6  D) 48  E) 27

**08.** (Mackenzie-SP–2010) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que $\begin{cases} a_{ij} = 10, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ e $B = (b_{ij})_{3x3}$ tal que $\begin{cases} b_{ij} = 3, \text{ se } i = j \\ b_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, o valor de det (AB) é

A) $27 \times 10^3$

B) $9 \times 10^3$

C) $27 \times 10^2$

D) $3^2 \times 10^2$

E) $27 \times 10^4$

**09.** (FEI-SP) Sendo **x** e **y** respectivamente os determinantes das matrizes inversíveis

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix},$$

podemos afirmar que $\frac{x}{y}$ vale

A) –12

B) 12

C) 36

D) –36

E) $-\frac{1}{6}$

**10.** (PUC-Campinas-SP) Sejam as matrizes mostradas a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz A + B.C é

A) –4  B) –2  C) 0  D) 1  E) 5

**11.** (UEL-PR) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3x2}$, tal que $a_{ij} = 2i - 3j$, e $B = (b_{jg})_{2x3}$, tal que $b_{jg} = g - j$. O determinante da matriz A.B é igual a

A) –12

B) –6

C) 0

D) 6

E) 12

**12.** (UFPE) Qualquer que seja **θ**, o log do determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

é igual a

A) 1

B) θ

C) $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

D) 0

E) $\cos^2\theta$

**13.** (CEFET-MG–2010) Se a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ é não inversível, então **c** pertence ao conjunto

A) {–9, –3}

B) {–3, 5}

C) {–2, 4}

D) {0, 9}

E) {1, 3}

**14.** (FGV-SP) **A** é uma matriz quadrada de ordem 2 e det (A) = 7. Nessas condições, det (3A) e det $(A^{-1})$ valem, respectivamente,

A) 7 e –7

B) 21 e $\frac{1}{7}$

C) 21 e –7

D) 63 e –7

E) 63 e $\frac{1}{7}$

**15.** (UNESP) Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem 3. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e **B** é tal que $B^{-1} = 2.A$, o determinante de **B** será

A) 24  B) 6  C) 3  D) $\frac{1}{6}$  E) $\frac{1}{24}$

## GABARITO

### Fixação

01. A
02. A
03. E
04. B
05. C

### Propostos

01. A
02. D
03. B
04. D
05. A
06. A
07. D
08. A
09. E
10. A
11. C
12. D
13. B
14. E
15. E

# MATEMÁTICA

MÓDULO 23 FRENTE E

## Sistemas lineares

## EQUAÇÃO LINEAR

É toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são as variáveis; $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes, e **b** é um número chamado termo independente.

**Exemplo**

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -7$

## SISTEMAS LINEARES

Chamamos sistema linear aquele formado por um conjunto de equações lineares.

**Exemplos**

**1º)** $\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

**2º)** $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

### Solução de um sistema linear

Dizemos que o conjunto ordenado de número $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, se para $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ todas as equações do sistema são verdadeiras.

## CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA

**i)** Um sistema linear é impossível (SI) (ou incompatível) se não admite solução alguma.

**ii)** Um sistema linear é possível (ou compatível) se admite pelo menos uma solução.

**iii)** Um sistema linear é possível e determinado (SPD) se admite única solução.

**iv)** Um sistema linear é possível e indeterminado (SPI) se admite infinitas soluções.

**Exemplos**

**1º)** O sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$ possui solução única igual a (8, 2).

Portanto, esse sistema é possível e determinado (SPD).

**2º)** Considere o sistema $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 8x + 2y = 6 \end{cases}$

Se multiplicarmos a primeira equação por −2 e, em seguida, somarmos o resultado com a segunda equação, obtemos $0x + 0y = 0$, que é uma equação claramente indeterminada. Como a segunda equação é múltipla da primeira, qualquer solução da primeira equação também será solução da segunda. Portanto, existem infinitas soluções, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

**3º)** O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ não possui soluções.

Observe que, ao multiplicarmos a primeira equação por −2 e, em seguida, somarmos o resultado com a segunda equação, obtemos $0x + 0y = 4$, que é uma equação que não possui soluções. Portanto, o sistema é impossível (SI).

## REGRA DE CRAMER

Consideremos o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sejam:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz dos coeficientes.

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 1ª coluna.

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 2ª coluna.

A Regra de Cramer afirma que:

Se D ≠ 0, então o sistema linear é possível e determinado, e a solução única (x, y) é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad e \quad y = \frac{D_y}{D}$$

**Exemplo**

Resolver o sistema a seguir, pela Regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

***Resolução:***

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 3 + 2) - (-3 - 4 + 1) \Rightarrow$$

$D = 7 + 6 = 13$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12 - 1 + 3) - (1 - 6 + 6) \Rightarrow$$

$D_x = 14 - 1 = 13$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6 + 18 - 2) - (9 - 24 - 1) \Rightarrow$$

$D_y = 10 - (-16) = 26$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 9 + 12) - (-18 - 2 + 3) \Rightarrow$$

$D_z = 22 - (-17) = 39$

Logo, temos:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{13}{13} = 1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2;\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

Portanto, S = {(1, 2, 3)}.

OBSERVAÇÃO

O sistema anterior só pôde ser resolvido porque D ≠ 0. Em resumo:

Se D ≠ 0 ⇒ SPD
Se D = 0 ⇒ SPI ou SI

# SISTEMA ESCALONADO

## Definição

Chama-se sistema escalonado aquele em que o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

# RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA ESCALONADO

Podemos encontrar dois tipos de sistemas escalonados. Vejamos quais são e como se resolvem.

## Número de equações igual ao número de incógnitas

Trata-se de um sistema possível e determinado, e cada incógnita é obtida resolvendo-se o sistema "de baixo para cima".

**Exemplo**

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & \text{(I)} \\ \quad y + z = 5 & \text{(II)} \\ \quad\quad -z = -3 & \text{(III)} \end{cases} \uparrow$$

***Resolução:***

Em (III), temos z = 3.

Em (II), temos y + 3 = 5 ⇒ y = 2.

Em (I), temos x + 2 + 3 = 6 ⇒ x = 1.

Portanto, S = {(1, 2, 3)}.

## Número de equações menor que o número de incógnitas

Para resolvermos esse sistema, escolhemos uma incógnita que não aparece no começo de nenhuma equação, chamada variável livre. Em seguida, calculamos o valor de cada uma das outras variáveis em função dessa variável livre. Desse modo, criamos um parâmetro para gerar soluções, atribuindo valores arbitrários para essa variável livre.

Esse sistema possui mais de uma solução e, sendo assim, é possível e indeterminado (SPI).

**Exemplo**

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

***Resolução:***

A variável que não aparece no começo de nenhuma equação é **z** (**z** é uma variável livre). Passando **z** para o 2º membro, temos:

$$\begin{cases} x + y = z + 4 & \text{(I)} \\ y = z + 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo II em I, temos $x + z + 1 = z + 4 \Rightarrow x = 3$.

Assim, a solução do sistema é $S = \{(3; z + 1; z), \forall z \in \mathbb{R}\}$.
Vejamos algumas soluções:

Para $z = 0 \Rightarrow S = \{(3; 1; 0)\}$

Para $z = 3 \Rightarrow S = \{(3; 4; 3)\}$

Para $z = -1 \Rightarrow S = \{(3; 0; -1)\}$

E assim por diante.

# ESCALONAMENTO DE SISTEMAS

Trata-se de uma excelente técnica de resolução de sistemas lineares. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Vamos efetuar as seguintes operações:

**i)** Substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −2.

**ii)** Substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −3.

Com isso, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x - 3y - 3z = -15 \\ 0x - 7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Em seguida, podemos dividir a segunda equação por −3:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x + y + z = 5 \\ 0x - 7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Podemos, agora, substituir a terceira equação pela soma desta com a segunda equação multiplicada por 7. Assim, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x + y + z = 5 \\ 0x + 0y + 2z = 4 \end{cases}$$

Resolvendo "de baixo para cima", temos x = 1, y = 3 e z = 2.

Portanto, S = {(1, 3, 2)}.

OBSERVAÇÕES

Se durante o escalonamento ocorrer

**i)** uma equação do tipo: $0.x_1 + 0.x_2 + ... = b$, com $(b \neq 0)$, o sistema será impossível (pois essa equação nunca está satisfeita).

**ii)** uma equação do tipo: $0.x_1 + 0.x_2 + ... = 0$, esta deve ser eliminada do sistema, pois ela é verificada para quaisquer valores das incógnitas.

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**01.** (PUC-SP) Se **a**, **b**, **c** é solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 2x + y + z = -1 \\ 4x + 2y - z = -11 \end{cases}$$, então a + b + c é

A) −2

B) −1

C) 0

D) 1

E) 2

***Resolução:***

A fim de escalonarmos o sistema, devemos

**i)** substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −2.

**ii)** substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −4.

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 0x - y + 3z = 9 \\ 0x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

Agora, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a segunda equação multiplicada por −2. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 0x - y + 3z = 9 \\ 0x + 0y - 3z = -9 \end{cases}$$

Observe que o sistema encontra-se escalonado. Resolvendo-o "de baixo para cima", obtemos x = −2, y = 0 e z = 3. Como **a**, **b**, **c** é solução, concluímos que a = −2, b = 0 e c = 3. Portanto, a + b + c = −2 + 0 + 3 = 1.

# SISTEMA HOMOGÊNEO

Um sistema é dito homogêneo quando todos os termos independentes das suas equações são nulos.

**Exemplo**

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogêneo sempre admite solução (pelo menos a nula); portanto, é sempre possível. A solução nula é chamada solução trivial.

**Exemplo**

O sistema $\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ admite a solução (0; 0; 0),

pois: $\begin{cases} 3.0 - 3.0 + 4.0 = 0 \\ 2.0 + 0 - 0 = 0 \end{cases}$

# DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa determinar para quais valores desses parâmetros o sistema é determinado, indeterminado ou impossível. Assim, há duas situações a serem consideradas:

## Sistema linear com o número de equações igual ao número de incógnitas

Nesse caso, usaremos a Regra de Cramer e as técnicas de escalonamento.

**Exemplo**

Discutir o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + kz = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$ em função do parâmetro **k**.

***Resolução:***

Pela Regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - k + 0 - (0 + 2 + k) = 2 - 2k$$

Para que o sistema seja possível e determinado (SPD), devemos ter $D \neq 0$, ou seja, $2 - 2k \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$.

Agora, iremos fazer $k = 1$ no sistema original, a fim de investigar se o mesmo será possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Vamos substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −1. Além disso, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação. Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação pela soma desta com a segunda equação multiplicada por −2, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

Observe que a terceira equação é impossível. Logo, nesse caso, o sistema é impossível.

**Resumindo:**

**i)** Se $k \neq 1 \Rightarrow$ Sistema possível e determinado (SPD)

**ii)** Se $k = 1 \Rightarrow$ Sistema impossível (SI)

# EXERCÍCIO RESOLVIDO

**02.** (UFMG) Determinar todos os valores reais **a** e **b**, de modo que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ tenha

A) solução única.

B) infinitas soluções.

C) nenhuma solução.

***Resolução:***

A) Temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4 + 4 + 9a) - (8a + 6 - 3) = a - 3$$

Para que o sistema seja possível e determinado, ou seja, admita solução única, devemos ter $D \neq 0$. Logo, $a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$.

B) Fazendo a = 3 no sistema original, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Vamos substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −3. Além disso, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −2.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 0x + y - 7z = b - 6 \\ 0x + y - 7z = -3 \end{cases}$$

Nesse ponto, basta observarmos que o sistema somente possuirá solução se b − 6 = −3, ou seja, se b = 3. Nesse caso, o sistema será possível e indeterminado (SPI) e, portanto, irá admitir infinitas soluções.

C) É fácil perceber que, se $b \neq 3$, o sistema torna-se impossível (SI), ou seja, não admite soluções.

## Sistema linear com o número de equações diferente do número de incógnitas

Nesse caso, a Regra de Cramer não pode ser aplicada. Portanto, usaremos apenas o escalonamento.

**Exemplo**

Discutir o sistema $\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x - 2y = 0 \\ -x + y = a \end{cases}$ em função de **a**.

***Resolução:***

Vamos substituir a segunda equação pela soma desta com a primeira equação multiplicada por −4. Além disso, vamos substituir a terceira equação pela soma desta com a primeira equação.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x - 6y = -24 \\ 0x + 2y = a + 6 \end{cases}$$

Trocando de posição a segunda equação com a terceira equação, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x + 2y = a + 6 \\ 0x - 6y = -24 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação pela soma desta com a segunda equação multiplicada por 3, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x + 2y = a + 6 \\ 0x + 0y = 3a - 6 \end{cases}$$

Observe que, para a = 2, a terceira equação se anula. Nesse caso, o sistema passa a ser escalonado com duas equações e duas incógnitas, ou seja, SPD. Caso contrário, o sistema torna-se SI.

OBSERVAÇÃO

Poderíamos também ter procedido do seguinte modo: Na primeira etapa do escalonamento, obtivemos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0x - 6y = -24 \\ 0x + 2y = a + 6 \end{cases}$$

Observe que, na segunda equação, temos y = 4 e, na terceira equação, temos $y = \frac{a + 6}{2}$. Igualando esses valores, temos: $\frac{a + 6}{2} = 4 \Rightarrow a + 6 = 8 \Rightarrow a = 2$

Logo, se a = 2, o sistema é possível e determinado (SPD). É fácil percebermos que, se $a \neq 2$, o sistema é impossível (SI).

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UFJF-MG–2007) Resolvendo o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

encontramos **y** igual a

A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4

**02.** (UNIRIO-RJ) Num determinado teste psicológico, existem 20 questões, com três opções de resposta **a**, **b** e **c**. Cada opção **a** vale +1, cada opção **b** vale 0, e cada opção **c** vale −1. Uma pessoa faz o teste, respondendo a todas as questões, com uma só resposta por questão, totalizando −5 pontos. Com as mesmas marcações, essa mesma pessoa totalizaria 54 pontos se cada opção **a** valesse +1, se cada opção **b** valesse +2, e se cada opção **c** valesse +4 pontos. O número de marcações feitas por essa pessoa na opção **b** foi de

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

**03.** (UFOP-MG–2008) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} mx + 3y - z = 2 \\ x + my + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Os valores de **m** para os quais a solução seja única são

A) m = −2 ou m = 5
B) m = 2 ou m = −5
C) m ≠ −2 ou m ≠ 5
D) m ≠ 2 ou m ≠ −5

**04.** (UFU-MG) Considere o sistema linear $S = \begin{cases} ax + 3y = 0 \\ 3x + ay = 0 \end{cases}$, em que **a** é uma constante real. Sabendo-se que existe uma única reta **r** de coeficiente angular positivo, tal que todos os pares ordenados (x, y), que são soluções de **S**, satisfazem a equação de **r**, pode-se afirmar que

A) necessariamente **a** é um número positivo.
B) existem exatamente dois valores possíveis para **a** nas condições do enunciado.
C) existe apenas um valor possível para **a** nas condições do enunciado.
D) **a** é divisível por 9.

**05.** (UFTM-MG–2007) Considere o sistema linear, descrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ele admitirá mais de uma solução para certos valores de **k**. O produto desses valores de **k** é

A) −49 B) −36 C) −25 D) −16 E) −9

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (Unimontes-MG–2007) Se $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$ são as soluções do sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + z = 4 \\ x + 4z = 10 \end{cases}$, então $x_0 + y_0 + z_0$ é igual a

A) 4 B) 5 C) 3 D) 2

**02.** (PUC Minas–2006) Para atender uma encomenda de fantasias, certa costureira comprou 3 m do tecido **A** e 2 m do tecido **B**, pagando R$ 25,50; depois, pagou R$ 46,50 na compra de 5 m do tecido **A** e 4 m do tecido **B**. Finalmente, para retocar a costura, comprou mais 1 m de cada um desses tecidos. Sabendo-se que, pela mão de obra, essa costureira cobrou a mesma quantia gasta na compra dos tecidos, pode-se afirmar que o valor a ser pago pela encomenda, em reais, foi

A) 144,00
B) 151,00
C) 165,00
D) 172,00

**03.** (UFJF-MG) Os valores de **a** e **b** para que o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 3a + 4b \\ (a - b)x + 2y = 8 \end{cases}$$

seja possível e indeterminado são

A) 3 e 5
B) −2 e 1
C) $\frac{1}{2}$ e 3
D) 0 e 1
E) 4 e −2

**04.** (Unimontes-MG–2007) O conjunto solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ é dado por

A) $\{(x, -x + 3, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
B) $\{(x, x - 3, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
C) $\{(-x, x + 4, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
D) $\{(-2x, 3x - 1, 4x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

**05.** (UFTM-MG–2006) O valor de **m** para o qual a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & -m \\ m+2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

admite mais de uma solução é um

A) divisor negativo de 12.
B) divisor negativo de 25.
C) divisor positivo de 18.
D) múltiplo negativo de 2.
E) múltiplo positivo de 5.

**06.** (FGV-SP–2010) Ao resolver o sistema linear determinado a seguir

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y - z = 5 \\ 3x + 2y - z = 14 \end{cases}$$

encontramos como solução a tripla ordenada (a, b, c). O valor de **a** é

A) 2
B) 3
C) 0
D) 1
E) −1

**07.** (UFV-MG–2007) Um pecuarista fica sabendo que seus animais devem ingerir diariamente 60 g do nutriente **A** e 40 g do nutriente **B**. Esse pecuarista dispõe de três tipos de ração, com as seguintes características, por quilograma:

I) A ração I contém 5 gramas do nutriente **A** e 8 gramas do nutriente **B**; custa R$ 4,00.

II) A ração II contém 5 gramas do nutriente **A** e 4 gramas do nutriente **B**; custa R$ 3,00.

III) A ração III contém 15 gramas do nutriente **A** e 8 gramas do nutriente **B**; custa R$ 8,00.

O pecuarista pretende misturar as rações I, II e III, de maneira que seus animais possam ingerir a quantidade de nutrientes recomendada. Se, além disso, ele deseja gastar exatamente R$ 32,00, é **CORRETO** afirmar que

A) é impossível o pecuarista fazer a mistura de modo que seus animais possam ingerir diariamente 60 g do nutriente **A**, 40 g do nutriente **B** e gastar exatamente R$ 32,00.

B) é possível o pecuarista fazer a mistura combinando 2 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

C) a mistura deve ser feita combinando 1 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

D) existem várias formas de fazer a mistura de modo que seus animais possam ingerir diariamente 60 g do nutriente **A**, 40 g do nutriente **B** e gastar exatamente R$ 32,00.

E) a mistura deve ser feita combinando 4 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

**08.** (IME-RJ–2007) Considere o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ 2x - y + 3z = b_2 \\ 5x - y + az = b_3 \end{cases}$$

Sendo $b_1$, $b_2$ e $b_3$ valores reais quaisquer, a condição para que o sistema possua solução única é

A) $a = 0$

B) $a \neq 2$

C) $a \neq 8$

D) $a \neq b_1 + b_2 - b_3$

E) $a = 2b_1 + b_2 + 3b_3$

**09.** (UFRGS–2006) O sistema $\begin{cases} 2x + y + 2z = b - 1 \\ x + 2y + z = b \\ x - y + z = 1 - b \end{cases}$

tem solução se, e somente se, **b** for igual a

A) –2

B) –1

C) 0

D) 1

E) 2

**10.** (PUC-SP–2006) Uma pessoa tem 32 moedas, sendo **x** de 5 centavos, **y** de 10 centavos e **z** de 25 centavos, totalizando a quantia de R$ 4,95. Considerando os possíveis valores de **x**, **y** e **z** que satisfazem as condições dadas, qual das sentenças seguintes **NUNCA** poderia ser verdadeira?

A) $x + y = 20$

B) $x + z = 25$

C) $x + z = 17$

D) $y + z = 25$

E) $y + z = 20$

**11.** (UFRGS) Em cada prova de uma competição esportiva, foram distribuídas uma medalha de ouro (3 pontos), uma de prata (2 pontos) e uma de bronze (1 ponto). Foram realizadas dez provas, e três equipes conquistaram todas as medalhas da competição, sendo vencedora a equipe que obteve o maior número de pontos. Observe a tabela a seguir, que apresenta a distribuição das medalhas.

| | Ouro | Prata | Bronze |
|---|---|---|---|
| **Equipe I** | x | z | x |
| **Equipe II** | 2y | x | y |
| **Equipe III** | x | y | z |

Considerando-se que a equipe III obteve 18 pontos, a equipe vencedora obteve

A) 19 pontos.

B) 20 pontos.

C) 21 pontos.

D) 22 pontos.

E) 23 pontos.

**12.** (CEFET-MG–2010) Sobre o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ k^2 & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nas variáveis **x**, **y** e **z**, é **INCORRETO** afirmar que admite

A) solução para todo $k > 0$.

B) solução para todo $k \in (-2, 0)$.

C) solução para todo $k \in [-2, -1]$.

D) única solução para todo $k < -2$.

E) única solução para todo $k \in \{-1, 2\}$.

**13.** (UFU-MG) Somando-se as mesadas de Huguinho, Luizinho e Zezinho chega-se a um total de 45 reais. Dobrando-se a mesada de Huguinho e mantendo-se os valores das outras duas, o total passa a ser de 55 reais; e dobrando-se as mesadas de Huguinho e de Luizinho e mantendo-se o valor da mesada de Zezinho, o total passa a ser de 70 reais. Multiplicando-se os valores numéricos das três mesadas obtemos

A) 4 500

B) 2 000

C) 1 500

D) 3 000

**14.** (PUC-SP) Sabe-se que, na compra de uma caixa de lenços, dois bonés e três camisetas, gasta-se um total de R$ 127,00. Se três caixas de lenços, quatro bonés e cinco camisetas, dos mesmos tipos que os primeiros, custam juntos R$ 241,00, a quantia a ser desembolsada na compra de apenas três unidades desses artigos, sendo um de cada tipo, será

A) R$ 72,00.

B) R$ 65,00.

C) R$ 60,00.

D) R$ 57,00.

E) R$ 49,00.

**15.** (FGV-SP–2007) A condição necessária e suficiente para que a representação gráfica no plano cartesiano das equações do sistema linear

$$\begin{cases} (m+1)x - y = 2 \\ 3x + 3y = 2n \end{cases},$$

nas incógnitas **x** e **y**, seja um par de retas paralelas coincidentes é

A) $m \neq -2$ e $n \neq -3$

B) $m \neq -2$ e $n = -3$

C) $m = -2$

D) $m = -2$ e $n \neq -3$

E) $m = -2$ e $n = -3$

# SEÇÃO ENEM

**01.** Um investidor montou uma carteira de aplicação em dois ativos **A** e **B** na bolsa de valores. Sabe-se que ele aplicou R$ 30 000,00 nessa carteira. Passados seis meses, o investidor verificou que o ativo **A** sofreu uma desvalorização de 40%, enquanto o ativo **B** sofreu uma valorização de 20%. Com isso, seu saldo total tornou-se igual a R$ 25 200,00. Pode se afirmar que

A) o total aplicado no ativo **A** foi 30% maior do que o total aplicado no ativo **B**.

B) o valor aplicado no ativo **B** representa 40% do total aplicado pelo investidor.

C) o prejuízo total do investidor representa 20% do total aplicado no ativo **A**.

D) a diferença entre os valores aplicados nos ativos **A** e **B** é igual a R$ 4 000,00.

E) após a desvalorização, o saldo da aplicação no ativo **A** tornou-se igual a R$ 12 000,00.

**02.** (Enem–2000) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca **X** é o dobro do número de carros roubados da marca **Y**, e as marcas **X** e **Y** juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca **Y** é

A) 20

B) 30

C) 40

D) 50

E) 60

## GABARITO

### Fixação

01. D
02. D
03. C
04. C
05. D

### Propostos

01. C
02. C
03. E
04. A
05. A
06. B
07. A
08. C
09. E
10. E
11. D
12. C
13. D
14. D
15. E

### Seção Enem

01. B
02. B

# MATEMÁTICA

MÓDULO 24 FRENTE E

## Binômio de Newton

### NÚMERO BINOMIAL

Dado dois números naturais **n** e **p**, com $n \geq p$, chamamos de **número binomial** de classe **p** e ordem **n** à expressão $\frac{n!}{(n-p)!.p!}$. Denotamos esse número binomial por $\binom{n}{p}$.

Portanto, temos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!.p!}$$

O número **n** é chamado numerador, e o número **p** é chamado denominador de $\binom{n}{p}$.

Sabemos que a expressão anterior corresponde à expressão do número de combinações simples, indicadas anteriormente por $C_{n,\,p}$. No presente contexto, iremos adotar a notação $\binom{n}{p}$. Tal notação, mais sintética, irá simplificar o estudo das propriedades e aplicações dessa expressão.

**Exemplo**

Calcular o valor do número binomial $\binom{7}{3}$.

***Resolução:***

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!.3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3!} = \frac{7.6.5}{6} = 35$$

OBSERVAÇÕES

**i)** $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!.0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

**ii)** $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!.n!} = \frac{n!}{0!.n!} = \frac{n!}{n!} = 1$

### NÚMEROS BINOMIAIS COMPLEMENTARES

Dois números binomiais são ditos complementares caso possuam o mesmo numerador, e a soma de seus denominadores seja igual ao numerador. Ou seja, os números $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são complementares, pois $p + n - p = n$.

Por exemplo, os números binomiais $\binom{10}{6}$ e $\binom{10}{4}$ são complementares.

**Propriedade:**

Dois números binomiais complementares são iguais.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

**Exemplos**

**1º)** $\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$

**2º)** $\binom{6}{6} = \binom{6}{0}$

Observe que se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, então $p = q$ ou $p + q = n$.

**Exemplo**

Resolver a equação $\binom{8}{x} = \binom{8}{x+2}$, sendo **x** um número natural menor do que 8.

***Resolução:***

Temos que:

$$\begin{cases} x = x + 2 \\ \text{ou} \\ x + x + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \text{ (absurdo)} \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{3\}$.

# RELAÇÃO DE STIFFEL

A soma de dois números binomiais, com o mesmo numerador e denominadores consecutivos, é igual a um número binomial com uma unidade a mais no numerador e com denominador igual ao maior dos denominadores daqueles binomiais.

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}, \text{ em que } n \geq p.$$

**Exemplo**

Calcular o valor da expressão $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}$.

***Resolução:***

$$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}=\binom{9}{6}+\binom{9}{7}=\binom{10}{7}$$

# TRIÂNGULO DE PASCAL

Os números binomiais podem ser organizados em forma de matriz, de modo que um número binomial $\binom{n}{p}$ ocupe a linha **n** e a coluna **p**, formando o Triângulo de Pascal, conforme a figura a seguir:

| | Coluna 0 | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 | ... | Coluna n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Linha 0** | $\binom{0}{0}$ | | | | | | |
| **Linha 1** | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ | | | | | |
| **Linha 2** | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ | | | | |
| **Linha 3** | $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{3}{3}$ | | | |
| **Linha 4** | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ | | |
| **⋮** | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | |
| **Linha n** | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{4}$ | ... | $\binom{n}{n}$ |

OBSERVAÇÕES

**i)** Cada um dos elementos da coluna 0 é da forma $\binom{n}{0}$, ou seja, é igual a 1.

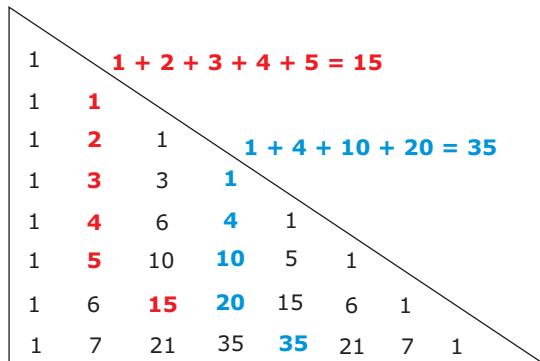
**ii)** O último elemento da última linha é da forma $\binom{n}{n}$, ou seja, também é igual a 1.

**iii)** Ao somarmos dois binomiais consecutivos de uma determinada linha usando a Relação de Stiffel, obtemos o binomial localizado imediatamente abaixo do segundo binomial. Por exemplo, $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{4}{3}$.

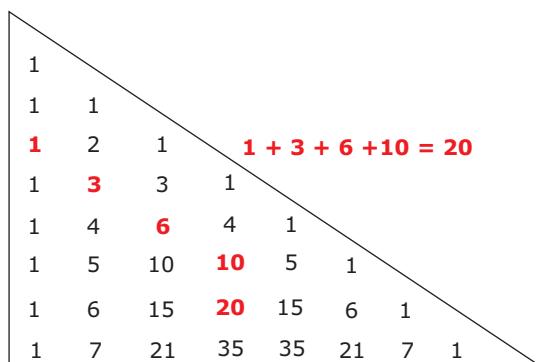
Desse modo, podemos facilmente montar um Triângulo de Pascal utilizando essas regras, ao invés de calcularmos o valor de cada binomial.

**Exemplo**

Construir um Triângulo de Pascal para n = 7.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

## Teorema das Linhas

A soma dos números binomiais da linha de ordem **n** é igual a $2^n$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| linha 0 | 1 | | | | | → | soma = 1 = $2^0$ |
| linha 1 | 1 | 1 | | | | → | soma = 2 = $2^1$ |
| linha 2 | 1 | 2 | 1 | | | → | soma = 4 = $2^2$ |
| linha 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | → | soma = 8 = $2^3$ |
| linha 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | → | soma = 16 = $2^4$ |

## Teorema das Colunas

Ao somarmos os números binomiais de determinada coluna, desde o primeiro elemento $\binom{n}{n}$ até um elemento qualquer $\binom{n+p}{n}$, obtemos o número binomial imediatamente abaixo e à direita deste último, ou seja, o número binomial $\binom{n+p+1}{n+1}$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 1 | **1** | | | | | | |
| 1 | **2** | 1 | | | | | |
| 1 | **3** | 3 | **1** | | | | |
| 1 | **4** | 6 | **4** | 1 | | | |
| 1 | **5** | 10 | **10** | 5 | 1 | | |
| 1 | 6 | **15** | **20** | 15 | 6 | 1 | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | **35** | 21 | 7 | 1 |

**1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15**

**1 + 4 + 10 + 20 = 35**

## Teorema das Transversais

Ao somarmos os números binomiais de determinada transversal, desde o elemento $\binom{n}{0}$ até um elemento qualquer $\binom{n+p}{p}$, obtemos o número binomial imediatamente abaixo deste último, ou seja, o número binomial $\binom{n+p+1}{p}$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | |
| **1** | 2 | 1 | | | | | |
| 1 | **3** | 3 | 1 | | | | |
| 1 | 4 | **6** | 4 | 1 | | | |
| 1 | 5 | 10 | **10** | 5 | 1 | | |
| 1 | 6 | 15 | **20** | 15 | 6 | 1 | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

**1 + 3 + 6 +10 = 20**

# BINÔMIO DE NEWTON

Inicialmente, vamos desenvolver alguns produtos da forma $(x + a)^n$:

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = 1x + 1a$

$(x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$

$(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

Os coeficientes resultantes do desenvolvimento desses binômios são os números binomiais que aparecem no Triângulo de Pascal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 1 | 1 | | |
| 1 | 2 | 1 | |
| 1 | 3 | 3 | 1 |

Portanto, observamos que expandir determinado binômio implica a utilização do cálculo combinatório. Cada um dos produtos anteriores pode ser escrito do seguinte modo:

$$(x + a)^0 = \binom{0}{0}.x^0.a^0$$

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0}.x^1.a^0 + \binom{1}{1}.x^0.a^1$$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0}.x^2.a^0 + \binom{2}{1}.x^1.a^1 + \binom{2}{2}.x^0.a^2$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0}.x^3.a^0 + \binom{3}{1}.x^2.a^1 + \binom{3}{2}.x^1.a^2 + \binom{3}{3}.x^0.a^3$$

.....................................................................................

Generalizando, temos:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}.x^n.a^0 + \binom{n}{1}.x^{n-1}.a^1 + \binom{n}{2}.x^{n-2}.a^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}.x^1.a^{n-1} + \binom{n}{n}.x^0.a^n$$

Essa expressão é conhecida como **Fórmula do Binômio de Newton**.

OBSERVAÇÃO

A expressão também pode ser escrita na notação somatório, como segue:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} . x^{n-p} . a^p$$

**Exemplo**

Desenvolver o binômio $(x + 3)^4$.

***Resolução:***

$$(x + 3)^4 = \binom{4}{0}.x^4.3^0 + \binom{4}{1}.x^3.3^1 + \binom{4}{2}.x^2.3^2 + \binom{4}{3}.x^1.3^3 + \binom{4}{4}.x^0.3^4 \Rightarrow$$

$$(x + 3)^4 = 1.x^4.1 + 4.x^3.3 + 6.x^2.9 + 4.x.27 + 1.1.81 \Rightarrow$$

$$(x + 3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

## Termo geral do Binômio $(x + a)^n$

Sabemos que:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} . x^{n-p} . a^p$$

Observe que o primeiro termo ($T_1$) é obtido fazendo p = 0.

$$T_1 = \binom{n}{0} . x^{n-0} . a^0$$

Analogamente, o segundo termo ($T_2$) ocorre para p = 1.

$$T_2 = \binom{n}{1} . x^{n-1} . a^1$$

Portanto, o termo que ocupa a posição p + 1 é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} . x^{n-p} . a^p$$

com expoentes decrescentes de **x**.

**Exemplos**

**1º)** Encontrar o terceiro termo do desenvolvimento de $(x^2 + 3)^6$, com expoentes decrescentes de **x**.

***Resolução:***

$$T_3 = \binom{6}{2} . (x^2)^{6-2} . 2^2 = \frac{6!}{2!.4!} . x^8 . 4 = 60x^8$$

**2º)** Determinar o termo independente de **x** no desenvolvimento de $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$.

***Resolução:***

O termo independente de **x** corresponde ao coeficiente de $x^0$. Assim:

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} . x^{4-p} . \left(-\frac{2}{x}\right)^p = \binom{4}{p} . x^{4-p} . \frac{(-2)^p}{x^p} \Rightarrow$$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} . x^{4-2p} . (-2)^p$$

Fazendo $4 - 2p = 0$, temos $p = 2$.

Substituindo na expressão, temos:

$$T_3 = \binom{4}{2} . x^0 . (-2)^2 = 6.4 = 24$$

# EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

**01.** (UFOP-MG) Para que se tenha um dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^{11}$ igual a $1\,386x^5$, o valor de **a** deve ser

A) $\sqrt[6]{3}$ B) $2\sqrt[3]{6}$ C) $\sqrt{10}$ D) 3 E) $3\sqrt{10}$

**02.** (PUC Rio) O coeficiente de **x** no desenvolvimento $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$ é

A) 10 B) 35 C) 15 D) 6 E) 20

**03.** (UFRGS) A soma dos coeficientes do polinômio $(x^2 + 3x - 3)^{50}$ é

A) 0 B) 1 C) 5 D) 25 E) 50

**04.** (UFSM-RS) Desenvolvendo o binômio $(2x - 1)^8$, o quociente entre o quarto e o terceiro termos é

A) –4 B) –x C) x D) $-\frac{1}{x}$ E) 4x

**05.** (Fatec-SP–2006) No desenvolvimento do binômio $(x - 1)^{100}$, segundo as potências decrescentes de **x**, a soma dos coeficientes do segundo e do quarto termos é

A) –323 500
B) –171 700
C) –161 800
D) 3 926 175
E) 23 532 300

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**01.** (PUC RS) No Triângulo de Pascal,

n = 0    1
n = 1    1 1
n = 2    1 2 1
n = 3    1 3 3 1
n = 4    1 4 6 4 1
...

a soma dos elementos da linha **n** com os da linha n + 1 é

A) $n(n + 1)$
B) $2^n.2^{n+1}$
C) $3.2^n$
D) $2.2^{n+1}$
E) $3^n.2^{n+1}$

**02.** (FGV-SP) Se $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2 - n}{2}$, então **n** é igual a

A) 4
B) 6
C) 9
D) 5
E) 8

**03.** (UFSM-RS) O coeficiente de $x^5$ no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^8$ é dado por

A) 0 B) 1 C) 8 D) 28 E) 56

**04.** (Unimontes-MG–2007) A soma dos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal, de numerador **n**, é 256. O valor de **n** é

A) 8
B) 9
C) 7
D) 6

**05.** (UFC) O coeficiente de $x^3$ no polinômio $p(x) = (x - 1)(x + 3)^5$ é

A) 30 B) 50 C) 100 D) 120 E) 180

**06.** (FGV-SP) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + y)^5$ é igual a

A) 81 B) 128 C) 243 D) 512 E) 729

**07.** (PUC Rio) No desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{4}{3x}\right)^8$, o termo independente de **x** é o

A) 1º B) 3º C) 2º D) 5º E) 4º

**08.** (PUC Rio) O coeficiente de $a^{13}$ no binômio $(a + 2)^{15}$ é

A) 105
B) 210
C) 360
D) 420
E) 480

**09.** (UFPI) Se **a** e **b** são números reais tais que $(a + b)^{10} = 1\,024$ e se o 6º termo do desenvolvimento binomial é igual a 252, então

A) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$
B) $a = 3$ e $b = -1$
C) $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{4}{3}$
D) $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$
E) $a = 1$ e $b = 1$

**10.** (UFBA) Sabendo-se que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$ é igual a 256, **CALCULE** $\binom{m}{2}!$.

**11.** (PUC Rio) Se $(1 + x + x^2)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_{2n}x^{2n}$, então $A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_{2n}$ vale

A) $2n - 1$
B) $3^n$
C) $\frac{3n+1}{2}$
D) $\frac{3n}{2}$
E) $\frac{3n-1}{2}$

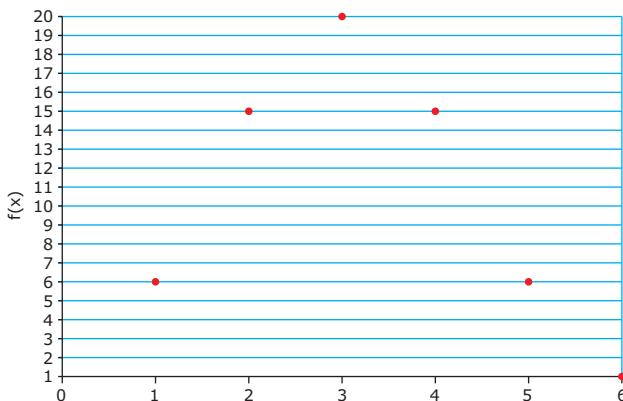
**12.** (Cesgranrio) O valor de **n** na igualdade $\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = 254$ é

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**13.** (UNIRIO-RJ) No desenvolvimento de $(x + y)^n$, a diferença entre os coeficientes do 3º e do 2º termos é igual a 54. Podemos afirmar que o termo médio é o

A) 3º B) 4º C) 5º D) 6º E) 7º

**14.** (Mackenzie-SP) Os 3 primeiros coeficientes no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$ estão em progressão aritmética. O valor de **n** é

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

**15.** (Unicamp-SP) O símbolo $C_{n,\,p}$ é definido por $\frac{n!}{p!.(n-p)!}$ para $n \geq p$ com $0! = 1$. Estes números $C_{n,\,p}$ são inteiros e aparecem como coeficientes no desenvolvimento de $(a + b)^n$.

A) **MOSTRE** que $C_{n,\,p-1} + C_{n,\,p} = C_{n+1,\,p}$.
B) Seja $S = C_{n,\,0} + C_{n,\,1} + ... + C_{n,\,n}$. **CALCULE** $\log_2 S$.

**16.** (UFV-MG) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^m$ é 625. O valor de **m** é

A) 5
B) 6
C) 10
D) 3
E) 4

**17.** (Mackenzie-SP) O coeficiente do termo em $x^{-3}$ no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ é

A) 1
B) 6
C) 10
D) 15
E) inexistente.

**18.** (UFOP-MG–2010) Considere a função f: A → B definida como $f(x) = C_{6,\,x}$, em que A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, **B** é um subconjunto de $Z_+^*$ (conjunto dos números inteiros positivos sem o zero) e $C_{6,\,x}$ representa a combinação simples de 6 elementos de **A** tomados **x** a **x**. Veja a seguir o gráfico dessa função.

Uma aplicação do cálculo combinatório é o desenvolvimento da potência n-ésima do Binômio de Newton. A fórmula do Binômio de Newton é expressa por:

$(a + b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_{n,\,x} a^{n-x} b^x$

Com base nessas informações, avalie os itens seguintes e, posteriormente, marque a alternativa **VERDADEIRA**.

I. O número de elementos do conjunto domínio de **f** é inferior ao número de elementos do conjunto imagem de **f**.

II. $C_{6,\,1} + C_{6,\,2} < C_{6,\,3} + C_{6,\,6}$

III. $(1 + h)^3 > 1 + C_{3,\,0} + C_{3,\,1}h + C_{3,\,2}h^2 + C_{3,\,3}h^3$

IV. $(r + h)^6 = r^6 + 6r^5h + 15r^4h^2 + 20r^3h^3 + 15r^2h^4 + 6rh^5 + h^6$

A) Todos os itens estão incorretos.
B) Existem três itens incorretos e um correto.
C) Existem três itens corretos e um incorreto.
D) Todos os itens estão corretos.

**19.** (PUC RS) Se o terceiro termo do desenvolvimento de $(a + b)^n$ é $21.a^5.b^2$, então o sexto termo é

A) $35.a^4.b^3$
B) $21.a^3.b^4$
C) $21.a^2.b^5$
D) $7.a.b^6$
E) $7.a^2.b^5$

**20.** (Mackenzie-SP) No desenvolvimento $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^t$, t ∈ ℕ, os coeficientes binominais do quarto e do décimo terceiro termos são iguais. Então, o termo independente de **x** é o

A) décimo.
B) décimo primeiro.
C) nono.
D) décimo segundo.
E) oitavo.

**21.** (UECE) O coeficiente de $x^6$ no desenvolvimento de $(x^2 + 2)^5$ é

A) 40
B) 48
C) 60
D) 80

# GABARITO

## Fixação

| | |
|---|---|
| 01. A | 04. D |
| 02. B | 05. C |
| 03. B | |

## Propostos

| | |
|---|---|
| 01. C | 12. C |
| 02. E | 13. E |
| 03. C | 14. C |
| 04. A | 15. A) Demonstração |
| 05. E | B) n |
| 06. C | 16. E |
| 07. D | 17. D |
| 08. D | 18. B |
| 09. E | 19. C |
| 10. 24 | 20. B |
| 11. B | 21. A |